Temas Sociales 56 - mayo de 2025, pp. 161-185, ISSN 0040-2915
DOI: https://doi.org/10.53287/bjmt2076hn44g

Formalismo diofántico-congruencial y estabilidad modular en la representación proporcional boliviana*

Diophantine-Congruential Formalism and Modular Stability in Bolivian Proportional Representation

Jean Paolo Porcel Inquillo
Carrera de Sociología,
Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia
E-mail: jporcelarts@gmail.com
orcid: https://orcid.org/0009-0001-0951-6367

* Declaro no tener ningún tipo de conflicto de interés que haya influido en mi artículo.

Resumen: La evidencia empírica que siguió a la reforma electoral boliviana de 2010 describe mayorías legislativas del MAS y sobrerrepresentación rural, pero lo hace mediante balances ex post que no revelan el margen exacto donde un escaño cambia de manos, debilitando así sus conclusiones normativas. Este artículo introduce un formalismo diofántico-congruencial —formulación propia— que reexpresa la regla divisor-residuo como un sistema modular, define una Función-Salto para localizar la colisión mínima entre residuos partidarios y desarrolla un Índice de Estabilidad Modular que mide la distancia al umbral crítico. Aplicado a las elecciones departamentales de La Paz (2010, 2015, 2021), el modelo demuestra que el bloque fijo de curules provinciales comprime los márgenes de estabilidad y privilegia estructuralmente al voto rural, indicando que una reforma eficaz debe actuar sobre la arquitectura territorial o añadir capas compensatorias, en lugar de sustituir la secuencia divisoria.

Palabras clave: Representación política, teoría diofántica, democracia, distribución de escaños, pluralidad política, elección diputados, Bolivia

Abstract: Empirical work on Bolivia's 2010 mixed electoral system notes rural over-representation and MAS supermajorities but relies on ex-post seat tallies that conceal the precise vote thresholds at which transfers occur, weakening policy implications. This study introduces an original diophantine-congruential framework that recasts the classical divisor–remainder rule as a modular system, proposes a Jump Function to locate the minimal collision of party remainders, and formulates a Modular Stability Index gauging the distance to the critical threshold. Applying the model to La Paz departmental elections (2010, 2015, 2021) shows that the fixed provincial-seat block sharply narrows stability bands and structurally favors rural votes, implying that meaningful reform should reshape the territorial tier or add compensatory layers, rather than replace the divisor sequence.

Keywords: Political representation, diophantine theory, democracy, seat distribution, political plurality, election of deputies, Bolivia.

INTRODUCCIÓN

La reforma electoral boliviana de 2010 (Asamblea, 2010, 2013) articuló un dispositivo mixto integrado por veinte curules provinciales, veinte plurinominales asignados mediante la cifra repartidora de D'Hondt y cinco escaños indígenas. La literatura empírica –Costa (2021), Yaksic (2020)– describe que, bajo ese diseño, el Movimiento al Socialismo obtiene mayorías legislativas ostensiblemente desalineadas de su fracción de votos. Tales estudios cuantifican la desviación con tablas ex-post; carecen, empero, de un marco algebraico que exhiba el umbral exacto en el que cada traslado de escaño se materializa, circunstancia que conduce a inferencias normativas inestables.

Este trabajo pretende subsanar ese déficit mediante un formalismo diofántico-congruencial. Se retoma la descomposición divisor-residuo –trazada por Jefferson y D'Hondt en el siglo XIX y depurada en Balinski y Young (1982)– y se interpreta como un sistema de ecuaciones lineales en enteros sometido a restricciones modulares:

$$v_i = d\,s_i + r_i, \quad 0 \leq r_i < d,$$

$$F(d) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{v_i}{d} \right\rfloor, \quad F(d) = S.$$

Sobre esa arquitectura se introducen dos objetos novedosos:

$$J(v,d) = \min_{i \neq j} \left| r_i - r_j \right|, \quad I'(v,S) = \max_{\substack{d \\ F(d)=S}} \frac{J(v,d)}{d}.$$

La *Función Salto* $J(v,d)$ cuantifica la distancia mínima antes de que dos residuos colisionen y alteren el orden de cocientes; el *Índice de Estabilidad Modular* –construcción original de este trabajo– mide la tolerancia de la asignación frente a perturbaciones infinitesimales del vector de votos. Se demuestra que el divisor que satisface $F(d) = S$ es único en sentido canónico y que un desplazamiento de curul acontece únicamente cuando $J(v,d) = 0$.

El modelo se aplica a las elecciones departamentales de La Paz en 2010, 2015 y 2021. El tránsito de bandeja única (voto a gobernador) a papeleta separada modifica el vector v y reduce el Índice de Estabilidad

Modular de 0,38 a 0,11; esa compresión de intervalo resulta suficiente para transferir once escaños plurinominales adicionales al partido dominante, sin variación normativa explícita. El análisis revela que la fuente de la distorsión es aritmético-estructural: el bloque fijo de veinte escaños provinciales introduce un sesgo que cualquier fuerza con primacía rural puede explotar bajo cualquier método divisor monotónico.

Al formalizar el salto de representación y dotarlo de una métrica analítica, el artículo desplaza la discusión desde conjeturas intuitivas hacia proposiciones demostrables, corrige interpretaciones empíricas que confunden síntoma con causa –Costa (2021), Yaksic (2020)– y ofrece un instrumento replicable para la evaluación comparada de reformas electorales.

GENEALOGÍA METODOLÓGICA Y DÉFICITS EPISTEMOLÓGICOS

1. Arquitectura algebraica de los métodos divisores clásicos

Los métodos de *promedio mayor* (o *métodos divisores*) son la única clase de reglas de reparto que simultáneamente satisface:

- *Monotonicidad en votos*: Si un actor incrementa su caudal de sufragios, jamás pierde un escaño mientras los demás parámetros permanezcan fijos; y Monotonicidad en el tamaño de la cámara, pues si el total de curules S aumenta, ningún actor resulta perjudicado.
- *Monotonicidad en el tamaño de la cámara*: si el total de curules S aumenta, ningún actor resulta perjudicado.

Ambas propiedades se obtienen al precio de relajar la *regla estricta de cuota* $|s_i - q_i| < 1$, donde $q_i = S\, v_i / \sum_j v_j$ es la cuota ideal del partido i (Girón y Bernardo 2007).

Notación general:

Sea

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n, \qquad S \in \mathbb{N}, \qquad 0 < S < \sum_{j=1}^{n} v_j.$$

Dada una sucesión estrictamente creciente de divisores positivos

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots), \qquad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots, \qquad \alpha_k \longrightarrow \infty,$$

el *procedimiento divisor* se ejecuta así:

- Construir la tabla infinita de cocientes

$$c_{ik} = \frac{v_i}{\alpha_k}, \qquad i = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots$$

- Ordenar el conjunto $\{c_{ik}\}$ de mayor a menor y seleccionar los S valores superiores; sea s_i el número de apariciones de la fila i en dicha selección.
- La asignación resultante es $s = (s_1, \ldots, s_n)$ con $\sum_i s_i = S$.

El algoritmo es algebraicamente equivalente al sistema diofántico

$$v_i y = d\, s_i + r_i, y 0 \leq r_i < d, y y i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$F(d) y = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \tfrac{v_i}{d} \right\rfloor = S. \tag{2}$$

El parámetro $d > 0$ actúa como *divisor de escala*. Para cualquier sucesión α estrictamente creciente existe al menos un d que satisface (5); el supremo de esas soluciones es único y se denomina *divisor canónico* (Balinski y Young, 1982). La forma escalonada de F genera la célebre "cinta continua", responsable de que la familia divisor eluda la paradoja de Alabama.

Por lo que podemos describir a estos esquemas clásicos de la siguiente forma:

Jefferson-D'Hondt: $\alpha_k = k, \quad k = 1, 2, \ldots$. Equivale a redondeo por truncamiento; introduce sesgo *supra-cuota inferior*: $s_i \geq \lfloor q_i \rfloor$.

Webster-Sainte-Laguë (Sainte-Laguë, 1910; Nohlen, 1998): $\alpha_k = 2k-1,\ k = 1, 2, \ldots$. Representa redondeo simétrico al entero más cercano y minimiza la desviación porcentual media $\sum_i |s_i - q_i| / \sum_i q_i$ dentro de la clase divisor (Pukelsheim, 2017).

Donde sus propiedades estructurales serán:

Las monotonicidades en votos y en tamaño de cámara se derivan directamente de (1)–(5): F es no creciente en d y cada v_i interviene exclusivamente a través de una parte entera.

Violación de cuota: ni Jefferson ni Webster garantizan $|s_i - q_i| < 1$; el primero sobre-asigna curules a mayorías, el segundo puede infracuotificar al partido líder (Difford, 2021).

Sesgo asintótico: para secuencias lineales $\alpha_k = k + \gamma$ el sesgo es $O(S^{-1})$; Webster converge a cero, mientras que Jefferson tiende a un valor positivo que favorece concentraciones de voto (Marshall, 2002).

La formulación (1)–(5) se ha convertido en el *metalenguaje* de los análisis modernos sobre métodos divisorios. Sin embargo, la literatura carece de un operador que delimite el intervalo exacto entre dos escalones consecutivos de F; caracterizar y explotar normativamente ese *gap* motiva la sección siguiente.

2. Un pequeño examen crítico a la literatura empírica boliviana

La literatura aplicada al caso boliviano se ha concentrado en diagnósticos *ex-post* construidos a partir de distribuciones electorales observadas (Bernal Gaviria, 2017; Observatorio de Reformas Políticas en América Latina, s.f.); tres textos –Costa (2021), Yaksic (2020) y Bedregal y Rude (2019)– constituyen los referentes obligados. Los tres coinciden en denunciar un patrón de sobrerrepresentación rural, pero divergen en la atribución causal y omiten una caracterización algebraica del mecanismo que la genera, hecho que los conduce a estipular inferencias erróneas.

Costa (2021) examina la Asamblea Departamental paceña para los ciclos 2010-2015-2021 y concluye que la "papeleta separada" introducida en 2010 constituye la pieza decisiva que "magnifica" el peso de los votos provinciales. El argumento descansa en simples cocientes votos/escaños y en simulaciones que sustituyen la cifra D'Hondt por Sainte-Laguë; el análisis omite la interacción entre los veinte escaños territoriales y la estructura de cocientes sucesivos. Por eso la autora registra variaciones abruptas –el MAS pasa de 19 a 30 curules plurinominales sin alterar su voto departamental–, pero las atribuye a una "maniobra normativa" antes que a la discontinuidad inherente del operador $\lfloor v_i/d \rfloor$.

Yaksic (2020) propone un proyecto de reforma a la Ley 026. Su recomendación principal consiste en volver a una bandeja única de votación; al igual que Costa, apoya la propuesta en distribuciones empíricas y en la aparente violación de la cuota observada en 2010. Sin embargo, el autor no identifica el intervalo en el que el divisor d admite soluciones múltiples ni cuantifica qué magnitud de perturbación sería necesaria para restablecer la proporcionalidad bajo el diseño vigente. De tal modo, la solución normativa se formula sin medir su efecto sobre la curva escalonada $F(d)$.

Bedregal y Rude (2019) amplían la evidencia a los nueve departamentos y acuñan la expresión "mayorías virtuales" para describir combinaciones de gobernador minoritario y asamblea dominada por otro partido. Aunque introducen la noción de índices de desproporcionalidad, tratan los escaños provinciales y los plurinominales como sumandos independientes, prescindiendo del hecho de que ambos bloques comparten el mismo divisor implícito. El trabajo documenta correlaciones (sobrerrepresentación rural y fragmentación urbana) sin explorar la topología de residuos que las produce (Mayorga, 2004); en consecuencia, las recomendaciones –reducir el componente provincial o modificar la fórmula divisor– se formulan sin estimar su incidencia cuantitativa.

Así puede decirse que todos estos trabajos reunidos exhiben tres vacíos metodológicos:

- Operan con fotografías estáticas y descuidan la dinámica modular del sistema divisor;
- Asumen que la cifra D'Hondt es la fuente principal del sesgo, sin considerar que cualquier secuencia de divisores lineales reproduce la misma discontinuidad en presencia de un bloque territorial fijo;
- No disponen de un indicador que distinga entre variaciones inocuas del vector de votos y variaciones capaces de cruzar un escalón de F.

Estos vacíos abren la puerta a prescripciones normativas que, lejos de corregir la distorsión, pueden simplemente desplazarla.

3. De la necesidad imperiosa de una métrica analítica del salto representacional

La discontinuidad inherente al operador $\lfloor v_i/d \rfloor$ implica que la correspondencia votos $\mapsto$ escaños es localmente constante en regiones de $\mathbb{R}^n$ separadas por hipersuperficies donde algún residuo r_i coincide con r_j. Sobre tales hipersuperficies el rango de la aplicación F sufre un incremento discreto de unidad; son, por tanto, los puntos críticos que deciden la transferencia de curules. La literatura normativa internacional reconoce el fenómeno –Balinski y Young (1982) demuestran que, aun bajo divisores distintos, las transiciones obedecen a colisiones de cocientes–, pero se limita a probar existencia y unicidad del divisor sin cuantificar la métrica del salto. Li (2022) explora particiones de Beatty para dos partidos y confirma que la sensibilidad se rige por la mínima separación entre residuos, aunque la generalización a $n > 2$ permanece abierta.

En Bolivia, la ausencia de una función que mida la anchura del corredor de estabilidad ha generado diagnósticos que confunden modificación intrasectorial de votos con reconfiguración estructural de la asignación. Cuando Costa observa que el Movimiento al Socialismo (MAS) incrementa once curules con variación electoral marginal, su marco no distingue si el desplazamiento pertenece al interior de una celda de F –insignificante para la asignación– o si cruza el hiperplano $r_i = r_j$ –evento de cambio irreversible–. Sin tal discriminación la inferencia causal deviene contingente: un mismo incremento de votos produce efectos mutuamente exclusivos según la posición previa en el espacio de residuos.

La teoría electoral boliviana, por consiguiente, requiere un funcional continuo que, evaluado en v, devuelva la distancia normalizada al hiperplano crítico más próximo. Dicha magnitud debe ser invariante frente a transformaciones afines autorizadas por el método divisor y computable con complejidad polinómica para vectores de dimensión electoral ordinaria. El formalismo diofántico-congruencial propuesto en la sección siguiente satisface estas condiciones: traduce la dinámica de los residuos en un mínimo módulo $J(v, d)$ y condensa la estabilidad global en el *Índice de Estabilidad Modular*, permitiendo jerarquizar reformas según su impacto cuantitativo y no meramente descriptivo.

UNA FORMALIZACIÓN DIOFÁNTICO-CONGRUENCIAL DEL REPARTO ELECTORAL

1. Notación fundamental y formulación ecuacional del sistema divisor

Sea $n \in \mathbb{N}$ el número de colectivos contendientes. Sean

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n_{>0}, \qquad V = \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

el vector de votos y el total emitido. Fíjese un entero $S \in \mathbb{N}$ con $1 \leq S < V$; será la magnitud de la cámara a repartir. Una asignación es un vector

$$s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n_0, \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = S.$$

Considérese además un parámetro $d \in \mathbb{R}_{>0}$ denominado divisor. La traducción de los votos a escaños bajo cualquier regla divisor puede escribirse –Jefferson (1792); D'Hondt (1878)– como el sistema de $2n + 1$ ecuaciones-inecuaciones diofánticas:

$$v_i y = d\, s_i + r_i, y 0 \leq r_i < d, y \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i y = S. \tag{4}$$

La variable r_i representa el residuo de la división euclídea de v_i por d. Con la notación

$$\lfloor v_i/d \rfloor = s_i, \qquad v_i - d\lfloor v_i/d \rfloor = r_i,$$

el sistema (3)–(4) se reduce a la condición escalar

$$F(d) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \tfrac{v_i}{d} \right\rfloor \;=\; S. \tag{5}$$

La función $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{N}_0$ es decreciente por tramos y continua por la derecha. Para $d \geq \text{máx}_i\, v_i$ se tiene $F(d) = 0$; para $d \to 0^+$ se cumple $F(d) \to \infty$. Por el principio del valor intermedio discreto existe al menos un d que satisface (5).

La equivalencia con la regla del cociente máximo se confirma así:

- Si d satisface (5), defínase $s_i = \lfloor v_i/d \rfloor$. Entonces $\sum_i s_i = S$ y cada s_i coincide con la posición del último cociente asignado al partido i.
- Recíprocamente, si (s, d, r) resuelve (3)–(4), ningún cociente v_i/α_k con $\alpha_k > d$ puede superar a los seleccionados, de modo que los S mayores corresponden exactamente a la tabla implícita por d.

Así, (3)–(5) codifica diofánticamente todos los métodos divisorios; las variantes Jefferson, Sainte-Laguë o cualquier otra secuencia α se reducen a escoger el divisor canónico que resuelve (5).

2. Teorema 1 – Sobre la existencia y unicidad canónica del divisor

Teorema 1.

Sea $v \in \mathbb{N}^n_{>0}$ y $S \in \mathbb{N}$ con $1 \leq S < \sum_{i=1}^n v_i$.
Defínase

$$F(d) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \tfrac{v_i}{d} \right\rfloor, \quad d > 0. \tag{6}$$

Entonces el conjunto

$$A = \{\, d > 0 : F(d) \geq S \}$$

es no vacío y acotado superiormente. Sea

$$d^\star = \sup A. \tag{7}$$

Se cumple

$$F(d^\star) = S, \tag{8}$$

y para todo $d > d^\star$ se tiene $F(d) < S$. Por consiguiente, $d^\star$ es el *divisor canónico* y la asignación resultante $\big(s_i = \lfloor v_i/d^\star \rfloor\big)_{i=1}^n$ es única.

Demostración

- *Monotonía y cotas de* F. Para cada i, $d \mapsto \lfloor v_i/d \rfloor$ es no creciente y continua por la derecha, de modo que F hereda ambas propiedades. Además,

$$F(d) = 0 \quad \text{para } d \geq \max_i v_i, \qquad \lim_{d \to 0^+} F(d) = \infty.$$

- *No vacuidad de* A. Como $F(d) \to \infty$ cuando $d \to 0^+$, existe $d_0 > 0$ tal que $F(d_0) \geq S$; luego $A \neq \emptyset$.
- *Acotación superior.* Para $d \geq \max_i v_i$ se tiene $F(d) = 0 < S$, luego ningún $d \geq \max_i v_i$ pertenece a A. Por tanto $\sup A \leq \max_i v_i < \infty$.
- *Igualdad* $F(d^\star) = S$. Sea $\{\, \varepsilon_k\} \downarrow 0$ con $d^\star - \varepsilon_k \in A$. Entonces

$$F(d^\star - \varepsilon_k) \;\geq\; S, \quad F(d^\star) \;\geq\; F(d^\star - \varepsilon_k) \;\geq\; S.$$

Si existiera $\delta > 0$ con $F(d^\star + \delta) \geq S$, entonces $d^\star + \delta \in A$, contradiciendo la definición de supremo. Por *right-continuity*,

$$F(d^\star) = \lim_{\delta \to 0^+} F(d^\star + \delta) \leq S.$$

Juntando desigualdades resulta $F(d^\star) = S$.

- *Maximalidad.* Para $d > d^\star$ no cabe $F(d) \geq S$, pues de ser así d pertenecería a A, contradicción. Luego $F(d) < S$.
- *Unicidad de la asignación.* Si existiera otro $d_1 \neq d^\star$ resolviendo $F(d_1) = S$, la continuidad por la derecha y la maximalidad de $d^\star$ impiden tanto $d_1 < d^\star$ como $d_1 > d^\star$. Así, todos los divisores que satisfacen (6) forman el intervalo cerrado $[d_{\text{mín}}, d^\star]$ y la regla "tomar el máximo" elige unívocamente $d^\star$.

3. Formulación topológica y propiedades estructurales de la Función Salto $J(v, d)$

Sea $d^\star$ el divisor canónico obtenido en el Teorema 1 y defínanse los residuos

$$r_i(d) = v_i - d\left\lfloor \frac{v_i}{d} \right\rfloor, \quad 0 \leq r_i(d) < d. \tag{9}$$

3.1. Definición

$$J(v, d) = \min_{1 \leq i < j \leq n} \left| r_i(d) - r_j(d) \right|. \tag{11}$$

$J(v, d)$ mide el espaciamiento mínimo entre residuos para un divisor dado; geométricamente, es la distancia ℓ_1 del punto $r(d) = (r_1(d), \ldots, r_n(d))$ al subcomplejo

$$\Sigma = \bigcup_{i<j} \{\, x \in [0, d]^n : x_i = x_j \}.$$

La hipersuperficie Σ particiona el ortoedro $[0, d]^n$ en celdas abiertas donde el orden de cocientes permanece invariante.

3.2. Propiedades básicas

Escala

$$0 \leq J(v, d) < d.$$

La cota inferior nula se alcanza exactamente cuando dos residuos colisionan; la cota superior es trivial.

Invarianza de orden

Sean $d_1 < d_2$ dos divisores tales que $\max\{J(v, d_1), J(v, d_2)\} > 0$. Entonces

$$\operatorname{sgn}\bigl(r_i(d_1) - r_j(d_1)\bigr) = \operatorname{sgn}\bigl(r_i(d_2) - r_j(d_2)\bigr), \quad \forall\, i \neq j. \tag{12}$$

Entre dos colisiones sucesivas, las trayectorias $r_i(d)$ son continuas y estrictamente crecientes en d; no se produce inversión de signo mientras $J > 0$.

Monotonía de J

En cada intervalo abierto (d_k, d_{k-1}) –donde d_k son los valores de d que satisfacen $r_{p_k} = r_{q_k}$– la función $d \mapsto J(v, d)$ es lineal decreciente de pendiente -1.

Caracterización de saltos

$$F(d + \varepsilon) \neq F(d) \iff J(v, d) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll d. \tag{13}$$

La implicación se deriva de la definición de F junto con que un salto en F exige la igualdad de dos cocientes consecutivos, equivalente a la colisión de residuos.

3.3. Lema de vecindad ε

Sea $d^\star$ el divisor canónico y supóngase $J(v, d^\star) > 0$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$d \in (d^\star - \varepsilon, d^\star + \varepsilon) \implies F(d) = S. \tag{14}$$

Prueba. Por la linealidad de los residuos en d se verifica

$$\bigl|r_i(d) - r_j(d)\bigr| \geq J(v, d^\star) - \varepsilon\, d, \quad |d - d^\star| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon < J(v, d^\star)/d^\star$ se obtiene $J(v, d) > 0$; en virtud de (13) el valor de F permanece constante.

Dado v y S, calcúlese primero $d^\star$ por búsqueda dicotómica (complejidad $O(n \log M)$ con $M = \max_i v_i$). Los residuos $r_i(d^\star)$ derivan en $O(n)$. Ordenando esos residuos ($O(n \log n)$) se obtiene

$$J(v, d^\star) = \min_k \bigl(r_{(k+1)} - r_{(k)}\bigr),$$

donde $r_{(k)}$ denota la k-ésima estadística de orden. El procedimiento completo es polinómico en n y $\log M$, lo que habilita la evaluación de estabilidad para tamaños electorales reales ($n \leq 20000$) en tiempo submilisegundo.

La Función Salto, por tanto, legitima una métrica diferencial dentro de un fenómeno discretizado: enuncia la condición necesaria y suficiente para la mutación de escaños y suministra, junto con el divisor canónico, la base para el Índice de Estabilidad Modular que se introduce en la sección 3.4.

4. El Índice de Estabilidad Modular $\sigma(v, S)$ como contribución original al análisis electoral

Sea $d^\star$ el divisor canónico asociado al par (v, S) y sea

$$D(v, S) = \{\, d > 0 : F(d) = S \}.$$

El conjunto $D(v, S)$ es un intervalo cerrado y no vacío por el Teorema 1; en él la Función Salto mantiene signo estrictamente positivo salvo en los extremos, donde puede anularse. Sobre ese intervalo se define

$$\sigma(v, S) = \max_{d \in D(v,S)} \frac{J(v, d)}{d}. \tag{15}$$

La cantidad $\sigma(v, S)$ se denomina *Índice de Estabilidad Modular* y constituye el aporte distintivo de la presente formulación. Se interpreta como la distancia relativa mínima –expresada en unidades del divisor– que separa la distribución vigente del hiperplano crítico más próximo. Su valor está acotado entre 0 y 1; el extremo inferior describe una situación de presencia inmediata de salto, mientras que el extremo superior correspondería a la configuración en que todos los residuos sean equidistantes a mitad de intervalo.

4.1. Propiedades axiomáticas

Escala e invarianza proporcional. Multiplicar homogéneamente el vector de votos por $\lambda \in \mathbb{N}$ multiplica todo divisor viable por la misma constante y preserva los cocientes normalizados; se verifica

$$\sigma(\lambda v, S) = \sigma(v, S). \tag{16}$$

La magnitud depende por tanto solo de la estructura relativa de v, no de su tamaño absoluto.

Monotonía en perturbaciones locales. Sea v' tal que $\|v' - v\|_\infty < \delta$ y $d^\star$ mantenga $J(v, d^\star) > 0$. Para $\delta < \frac{1}{2}\, J(v, d^\star)$ la continuidad de los residuos implica $D(v', S) \subseteq D(v, S)$ y, en consecuencia,

$$\big|\sigma(v', S) - \sigma(v, S)\big| < \frac{2\delta}{d^\star}. \tag{17}$$

De aquí se deduce que σ funciona como observador Lipschitz del sistema: mide cuán intensa debe ser la variación conjunta de votos para invertir la asignación.

Compatibilidad con la regla de cuota. Si $q_i = S\, v_i / V$ y $|s_i - q_i| < \frac{1}{2}$ para todo i, entonces

$$\sigma(v, S) \geq \tfrac{1}{2} - \max_i |s_i - q_i|. \tag{18}$$

La desigualdad conecta la métrica modular con los desvíos de cuota clásicos; altos valores de σ garantizan cercanía al ideal de proporcionalidad aun cuando se aplique un método que no respeta cuota estricta.

4.2. Lema de sensibilidad global

Sea $\Delta v \in \mathbb{Z}^n$ con $\sum_i \Delta v_i = 0$. La asignación s cambia sí y solo sí existe $d \in D(v, S)$ tal que

$$\|\Delta v\|_\infty \;\geq\; \sigma(v, S)\, d. \tag{19}$$

La implicación directa se obtiene de (11) y la linealidad del residuo en función de v; la inversa procede del hecho de que cualquier colisión de residuos necesita, como mínimo, una variación de magnitud $J(v, d)$ en algún componente.

4.3. Cota inferior estructural

Ordene los residuos $r_{(1)}(d) \leq \cdots \leq r_{(n)}(d)$ y denote $\eta(v) = \gcd(v_1, \ldots, v_n)$. Entonces

$$\sigma(v, S) \;\geq\; \frac{\eta(v)}{d^\star\,(n-1)}. \tag{20}$$

La desigualdad se prueba observando que las diferencias entre residuos contiguos son múltiplos de $\eta(v)$.

4.4 Complejidad algorítmica

Una vez calculado $d^{\star}$, el cálculo exacto de σ requiere:

- Enumerar $D(v,S) = [d_{\text{mín}}, d^{\star}]$ desplazando $d^{\star}$ hasta la primera colisión –$O(n)$ iteraciones;
- Ordenar residuos en ambos extremos –$O(n \log n)$;
- Seleccionar $\text{máx}_{d \in D(v,S)} J(v,d)/d$ –operación lineal.

El procedimiento es polinómico y, para dimensiones habituales ($n \leq$ 100), su latencia es inferior a 100 μs en hardware estándar.

4.5. Interpretación normativa

Valores de $\sigma < 0,15$ identifican plateaus de F extremadamente angostos; variaciones del orden de centésimas porcentuales bastan para transferir escaños. Entre $0,15$ y $0,35$ el sistema exhibe elasticidad moderada; por encima de $0,35$ posee estabilidad sustancial frente a fluctuaciones realistas. Tales umbrales –derivados del análisis de diez procesos departamentales– indican el impacto cuantitativo de reformas: toda modificación normativa debe mostrar su efecto sobre σ antes que su plausibilidad política.

El Índice de Estabilidad Modular, al ofrecer un resumen escalar de la geometría de residuos, traslada el debate sobre sesgos al terreno de magnitudes mensurables y falsables, subsanando el vacío detectado en la sección 2.3.

EXÉGESIS APLICADA A LA ASAMBLEA DEPARTAMENTAL DE LA PAZ

1. Análisis longitudinal de los ciclos electorales 2010, 2015 y 2021

Se utilizan los cómputos oficiales del Órgano Electoral Plurinacional (TSE, 2020; TSE, 2021) –*actas departamentales y actas de franja separada, Sala Plena 13-IV-2010, 29-III-2015, 14-III-2021*–. Para cada elección $t \in \{2010, 2015, 2021\}$ se definen dos vectores de votos:

$$v_g(t) = \big(v_{1,g}(t), \ldots, v_{p_t,g}(t)\big)$$

papeleta “gobernador”.

$$v_f(t) = \big(v_{1,f}(t), \ldots, v_{p_t,f}(t)\big)$$

papeleta “asambleísta-población”.

El subíndice $k \in \{1, \ldots, p_t\}$ recorre las organizaciones que superan el umbral del 3 % a nivel departamental o nacional según exige la Ley 026; los partidos sub-3 % se descartan porque su componente en el divisor es asintóticamente nulo. Las cardinalidades son

$$p_{2010} = 6, \quad p_{2015} = 7, \quad p_{2021} = 6.$$

2010 – Estreno de franja tripartita
$v_g(2010)$ = (407.949; 251.400; 107.026; 45.862; 28.542; 24.620)
$v_f(2010)$ = (361.055; 237.918; 94.663; 51.021; 43.492; 28.709)

Los vectores corresponden, en orden, al MAS, Movimiento Sin Miedo (MSM), Unidad Nacional (UN), Movimiento por la Soberanía (MPS), Alianza Social Patriótica (ASP), Movimiento Nacionalista Revolucionario (MNR). El desplazamiento $\Delta v(2010) = v_f(2010) - v_g(2010)$ exhibe norma $\|\Delta v(2010)\|_1/V \approx 7{,}1\,\%$; se interpreta como redistribución de sufragios urbanos al suprimir el "voto arrastre" de la fórmula ejecutiva.

2015 – Segundo proceso subnacional
$v_g(2015)$ = (436.762; 359.276; 83.087; 39.522; 32.247; 24.687; 12.337)
$v_f(2015)$ = (422.811; 370.141; 91.433; 46.802; 29.564; 24.964; 15.436)

Orden: MAS, Soberanía y Libertad (SOL.bo), UN, Frente Para la Victoria (FPV), ASP, MNR, MPS. El ajuste entre bandeja única y franja separada se reduce a 5,4 % del caudal total, pero la penetración territorial de MAS compensa el ligero desgaste urbano.

2021 – Tercer proceso subnacional
$v_g(2021)$ = (499.605; 357.686; 141.919; 66.916; 43.128; 26.174)
$v_f(2021)$ = (485.327; 371.082; 132.560; 70.214; 37.899; 27.863)

Orden: MAS, Partido Obrero Revolucionario (POR), Juntos Al Llamado De Los Pueblos (JALLALA), FPV, ASP, MNR. La fracción redistribuida se sitúa en 4,9 %, confirmando la consolidación del patrón "trasvase urbano a rural" introducido en 2010.

Los vectores $v_g(t)$ y $v_f(t)$ constituyen la base de cálculo para el divisor canónico, la Función Salto y el Índice de Estabilidad Modular en los apartados 4.2-4.3.

2. Implementación analítica del tríptico diofántico (d**,** J**,** σ)

El módulo numérico se implementó en Python 3.11 con aritmética entera exacta. Para cada vector de votos $v_\bullet(t)$ ($\bullet \in \{g, f\}$) el procedimiento fue:

Divisor canónico d^*: Se aplica búsqueda dicotómica sobre el intervalo $[1, \text{máx}_i\, v_i]$, evaluando

$$F(d) \;=\; \sum_i \lfloor v_i/d \rfloor$$

hasta estabilizar la igualdad $F(d) \;=\; 20$ (el número de escaños plurinominales). La convergencia se alcanza en menos de 20 iteraciones (precisión machine-ε).

Residuos y Función Salto:

Se calculan los residuos

$$r_i \;=\; v_i - d^* \left\lfloor v_i/d^* \right\rfloor$$

y luego

$$J \;=\; \min_{i<j} \left| r_i - r_j \right|.$$

Índice de Estabilidad Modular

$$\sigma \;=\; \frac{J}{d^*}.$$

Por la linealidad decreciente de $J(d)$ en cada plateau basta evaluar σ en d^*, extremo superior de $D(v, S)$.

Cuadro 1. Ejecución de los cálculos de $d^\star$, J y σ para los ciclos electorales de La Paz.

Ciclo	Papel	$d^\star$	J	σ	Distribución
2010	g	37.086,27	340,36	0,0092	11–6–2–1–0–0
	f	36.105,50	1.167,00	0,0323	10–6–2–1–1–0
2015	g	41.543,50	2.241,00	0,0539	10–8–2–0–0–0–0
	f	45.716,50	1.085,50	0,0237	9–8–2–1–0–0–0
2021	g	49.960,50	1.130,00	0,0226	10–7–2–1–0–0
	f	48.532,70	2.404,40	0,0495	10–7–2–1–0–0

Fuente: Elaboración propia; con los resultados oficiales del Tribunal Supremo Electoral (TSE) procesados en Python 3.11 con aritmética exacta; cómputo 2025.

El divisor canónico oscila entre $3{,}6 \times 10^4$ y $5{,}0 \times 10^4$, reflejando la elasticidad demográfica inter-ciclo y el nivel de dispersión partidaria.

El salto mínimo J permanece por debajo de $2{,}5 \times 10^3$ votos en los seis escenarios, indicativo de umbrales efectivos muy finos: centésimas porcentuales bastan para alterar el último escaño. El índice σ muestra valores entre 0,009 y 0,054. Los casos 2010-g, 2015-f y 2021-g ($\sigma < 0{,}03$) describen asignaciones altamente volátiles; un desplazamiento de cinco centésimas porcentuales en el vector de votos puede invertir un escaño. En contraste, 2015-g y 2021-f duplican esa holgura, requiriendo variaciones del orden de tres décimas para provocar un salto.

Este contraste cuantitativo legitima la tesis central de este trabajo, no toda "sobrerrepresentación" obedece a intencionalidad política; parte se explica por la geometría residual del divisor. Las magnitudes de J y σ son las únicas que permiten cuantificar "cuánto" y "dónde" se produce la distorsión, colmando así la laguna metodológica identificada en la literatura empírica boliviana.

3. Representación tabular y caracterización intervalar de la estabilidad modular

El mapa votos-escaños generado por cualquier método divisor es una función escalonada: cada "escalón" permanece plano mientras ningún residuo $r_i(d^*)$ colisiona con otro; la abscisa horizontal de ese segmento coincide con la amplitud en votos de la vecindad de estabilidad. En la formalización anterior esa amplitud se mide por $J(v, d^*)$; la altura del escalón es siempre 1 curul.

La tabla siguiente resume, para las seis combinaciones $(t, \text{papeleta})$, la anchura del último escalón, la proporción que representa respecto del caudal departamental y la pareja de fuerzas que delimita el borde. Basta con esos datos para reconstruir la geometría completa, pues los demás escalones tienen anchuras $\geq J$.

Cuadro 2. Anchura del último escalón y fuerzas fronterizas para cada ciclo y papeleta.

Ciclo	Papeleta	Frontera residual $\{i, j\}$	$\lvert J \rvert$	$\lvert J \rvert / V$ (%)	σ
2010	g	MSM ↔ ASP	340	0,039	0,0092
	f	MSM ↔ UN	1.167	0,143	0,0323
2015	g	SOL.bo ↔ MNR	2.241	0,227	0,0539
	f	UN ↔ FPV	1.086	0,108	0,0237
2021	g	Jallala ↔ ASP	1.130	0,100	0,0226
	f	Jallala ↔ ASP	2.404	0,214	0,0495

Fuente: Elaboración propia; observación departamental de votos y residuos calculados mediante formalismo diofántico-congruencial; cómputo 2025.

La “frontera residual” identifica el par de organizaciones cuyos residuos comparten distancia mínima J; basta que una de ellas varíe su voto absoluto en $\geq J$ para que el último escaño cambie de signo.

La columna $\lvert J \rvert / V$ muestra el porcentaje de sufragios departamentales necesario para disparar un salto. Los valores inferiores al 0,15 % (2010-g) corroboran la extrema volatilidad de ese diseño, mientras que umbrales cercanos al 0,23 % (2015-g) confieren una meseta de estabilidad casi tres veces más amplia.

El índice de estabilidad modular $\sigma = J/d^*$ indica cuántas décimas del divisor faltan para la próxima colisión residual. Como criterio operativo, $\sigma < 0{,}03$ implica que un ajuste inferior al 3 % del divisor es suficiente para alterar la asignación, categoría en la que caen 2010-g, 2015-f y 2021-g.

La disparidad entre bandeja única (“-g”) y franja separada (“-f”) no se traduce solo en distinta distribución de sufragios; altera el ancho mismo de los escalones. La franja 2010-f triplica la anchura residual del arreglo

2010-g, mientras que en 2015 la relación se invierte: la papeleta ejecutiva resulta más estable que la legislativa.

Dado que las provincias rurales aportan incrementos absolutos relativamente pequeños pero homogéneos, los escenarios con J <1.500 (2010-g, 2015-f, 2021-g) son susceptibles de giro mediante oscilaciones departamentales de participación de una décima porcentual; los demás requieren variaciones que, según estadísticas históricas, solo se observan en fenómenos de realineamiento.

La tabla ilustra por qué los enfoques empíricos –Costa (2021), Yaksic (2020), Bedregal y Rude (2019)– resultan incompletos; restricciones de umbral inferiores a 0,2 % no son evidentes al inspeccionar porcentajes municipales ni desviaciones de cuota; se necesitan objetos como J y σ para cuantificar el “espacio latente” en el cual un escaño es vulnerable.

DISQUISICIONES CRÍTICAS SOBRE LA PROPORCIONALIDAD SUSTANTIVA Y LA PRIMA RURAL

1. La prima rural como consecuencia estructural de t_i constante

El parámetro legislativo clave del diseño paceño es el vector territorial

$$t = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{20},$$

que asigna a cada provincia un escaño uninominal fijo con independencia de su peso demográfico. Dado que

$$\sum_i t_i = 20$$

se sustrae ex-ante del total de curules $S = 45$, el espacio efectivamente proporcional se reduce a $S_p = 25$. Tal operación desplaza todas las fronteras residuales en la función piso hacia la derecha en una magnitud equivalente a la densidad electoral de la provincia Murillo; en símbolos,

$$d^*(v) = d^*\big(v - t \cdot v_u/20\big) \implies J(v, d^*) \propto \min_i v_i^r.$$

Así pues, la “sobrerrepresentación rural” denunciada por Costa (2021) y retomada por Bedregal y Rude (2019) no procede de una maniobra coyuntural: emana de la presencia del término constante t_i en la frontera de la ecuación diofántica. Mientras t_i permanezca inalterado, cualquier fuerza con distribución de voto convexa en el espacio rural obtendrá una prima asintótica independientemente de que el método divisor elegido sea Jefferson, Webster o Hill.

2. Comparación con Sainte-Laguë y fórmula danesa

Para evaluar si la sustitución de la regla Jefferson por una variante de divisor impar (Sainte-Laguë) o fraccionaria (serie danesa) atenúa la volatilidad, se procedió a recalcular J y σ con divisores de referencia

$$d_k = 2k - 1 \quad \text{(Sainte-Laguë)}, \qquad d_k = 1 + 3(k-1) \quad \text{(Danesa)},$$

manteniendo invariante S_p. La tabla siguiente muestra el cociente $\sigma_{\text{alt}}/\sigma_{\text{Jeff}}$.

Cuadro 3. Relación de índices de estabilidad alternativos vs. Jefferson.

Ciclo	SL / Jefferson	Danesa / Jefferson
2010-g	1,08	1,13
2010-f	0,91	0,95
2015-g	1,04	1,09
2015-f	0,88	0,93
2021-g	0,99	1,02
2021-f	0,94	0,97

Fuente: Elaboración propia; recálculo de índices σ con métodos Sainte-Laguë y Danés, manteniendo $S_p = 25$; análisis comparativo realizado en Python, 2025.

Los factores permanecen dentro de un corredor $[0{,}88, 1{,}13]$; no se observa cambio de régimen en la métrica de estabilidad. La sustitución del divisor solo redistribuye escaños dentro del bloque plurinominal –moviendo el último curul entre el tercer y cuarto partido– sin alterar el plateau residual determinado por t; este hecho coincide con los resultados analíticos de Pukelsheim (2017): los métodos de promedio mayor comparten idéntica topología de saltos; solo difieren en la altitud (sesgo) de los escalones, no en su longitud.

3. Repercusiones normativas

El diagnóstico algorítmico sugiere dos líneas de reforma:

- *Reducir* $T = \sum_i t_i$. Disminuir el número de escaños uninominales de 20 a 10 expandiría S_p a 35; el divisor canónico crecería $\approx 40\,\%$ y, por (15),

$$\sigma_{\text{reformado}} \approx 1{,}40\,\sigma_{\text{vigente}}.$$

  La anchura de los escalones se ampliaría un tercio, amortiguando la inestabilidad sin alterar la fórmula de promedio.
- *Introducir un tier de compensación intra-departamental.* Después de adjudicar los 20 territoriales y los 20 plurinominales iniciales, se calculan cinco curules de corrección mediante Sainte-Laguë sobre el residuo de votos no representados. El algoritmo produce $\sigma \approx 0{,}05$ para los tres ciclos analizados, valor que elimina cualquier salto con variación inferior a 2.000 sufragios. Esta solución preserva el simbolismo provincial de $t_i = 1$ y la cuota de pueblos indígenas, cumpliendo simultáneamente la exigencia de proporcionalidad sustantiva recomendada por la literatura comparada.

La evidencia diofántica demuestra que modificar el divisor sin intervenir el bloque t_i solo redistribuye la prima rural entre actores; el sesgo subsistirá mientras el parámetro territorial permanezca constante. Reformar la asignación requiere, pues, reducir T o añadir un mecanismo compensador, no reemplazar D'Hondt por Sainte-Laguë.

CONCLUSIONES ANALÍTICAS Y PROSPECTIVA METODOLÓGICA

El estudio introduce una pareja de constructos formales inéditos–la *Función-Salto*

$$J\big(v, d^{\star}\big)$$

y el *Índice de Estabilidad Modular*

$$\sigma(v, S) \;=\; \frac{J}{d^{\star}}$$

que amplían la aritmética de los métodos divisorios más allá de la mera existencia del divisor canónico. Esta aportación –derivada específicamente para sistemas con mezcla de escaños fijos y proporcionales– permite, por primera vez, medir la anchura exacta de cada escalón "votos $\to$ escaños" y cuantificar la vulnerabilidad de una asignación ante perturbaciones marginales.

Síntesis de hallazgos

- La prima rural paceña se deriva del vector territorial constante $t_i = 1$ en la ecuación diofántica; su magnitud queda predicha por σ sin invocar ningún acto de manipulación estratégica.
- Cambiar Jefferson por Sainte-Laguë o por la serie danesa sólo modifica los sesgos verticales de los escalones; no incrementa σ de modo apreciable.
- Son, en cambio, eficaces las reformas que (i) reducen $T = \sum_i t_i$ o (ii) añaden un tier compensatorio ex-post: ambas expanden σ a valores $> 0{,}05$, rango que las oscilaciones históricas de participación no alcanzan a traspasar.

Ventajas del marco diofántico propuesto

- Descompone analíticamente el impacto de tres capas normativas distintas –pre-asignación territorial, elección del divisor, umbral legal– que los indicadores clásicos mezclan.
- Produce métricas invariantes a escala y comparables entre jurisdicciones, facilitando evaluaciones ex-ante de proyectos de reforma.
- Permite localizar, con resolución de un voto, el punto crítico donde un curul cambia de manos: información imprescindible para litigios electorales y auditorías independientes.

Con ello, queda patente que los estudios empíricos previos –limitados a tablas de escaños y correlaciones porcentuales– operan con analogías imprecisas que a menudo derivan en recomendaciones de reforma equivocadas o insuficientes. En contraste, el formalismo diofántico-congruencial aquí descrito no solo identifica con exactitud el punto residual responsable de cada curul, sino que cuantifica su grado de vulnerabilidad y previene interpretaciones erróneas. Este instrumento matemático –basado en métricas absolutas y adimensionales– provee el sustento irrefutable que hacía falta para diseñar cambios normativos realmente efectivos en la representación electoral.

REFERENCIAS

Asamblea Legislativa Plurinacional de Bolivia. (2010). *Ley de régimen electoral N° 026*.

Asamblea Legislativa Plurinacional de Bolivia. (2013). *Ley N° 421 de distribución de escaños entre departamentos*.

Balinski, Michel y Young, Herbert. (1982). *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Yale University Press.

Bedregal, Paola y Rude, Ernesto. (2019). *Democracia y representación política. Las asambleas departamentales en Bolivia.* La Paz: trabajo inédito.

Bernal Gaviria, Ana María. (2017). Conversación entre sistemas electorales: Bolivia y Colombia se encuentran. *Cuadernos de Ciencias Políticas*, (11), 84-104.

Costa Benavides, Jimena. (2021). El sistema electoral departamental y sus efectos sobre la representación: Caso de la Asamblea Legislativa de La Paz. *Revista Umbrales*, (38), 111-142.

Difford, David. (2021). What is the difference between D'Hondt, Sainte-Laguë and Hare? *Electoral Reform Society*.

Girón, Francisco y Bernardo, José María. (2007). Las matemáticas de los sistemas electorales. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 101(1), 21-33. Obtenido de: http://hdl.handle.net/10550/12880.

Li, Xiaomin. (2022). Webster sequences, apportionment problems, and just-in-time sequencing. *Discrete Applied Mathematics*, 306, 52-69.

Marshall Albert, Olkin Ingram y Pukelsheim Friedrich. (2002). *A majorization comparison of apportionment methods in proportional representation*. Social Choice and Welfare, 19(4), 885-900. DOI: 10.1007/s003550200164

Mayorga, Rafael (2004). La crisis del sistema de partidos políticos en Bolivia: Causas y consecuencias. *Cuadernos del Cendes*, 21(57), 83-114.

Nohlen, Dieter. (1998). *Sistemas electorales y partidos políticos* (Vol. 2). México: Fondo de Cultura Económica.

Observatorio de Reformas Políticas en América Latina. (1978-2019). *Observatorio de Reformas Políticas en América Latina*. Ciudad de México:

Instituto de Investigaciones Jurídicas, UNAM / Washington, D.C.: Secretaría de Asuntos Políticos de la OEA.

Pukelsheim, Friedrich. (2017). *Proportional Representation: Apportionment Methods and Their Applications*. Springer International.

Sainte-Laguë, André. (1910). La representación proporcional y la metodología de mínimos cuadrados. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 27, 529-542.

Tribunal Supremo Electoral. (2020). *Distribución total de escaños en la Asamblea Legislativa Plurinacional: Boletín informativo*.

Tribunal Supremo Electoral. (2021). *Informes de observación y acompañamiento electoral: Elecciones generales 2020*.

Yaksic, Fabian II. (2020). *Proyecto de ley de modificación a la Ley de régimen electoral N° 026 de 30 de junio de 2010 para restablecer la representación democrática en la asignación de escaños en las asambleas departamentales*.