

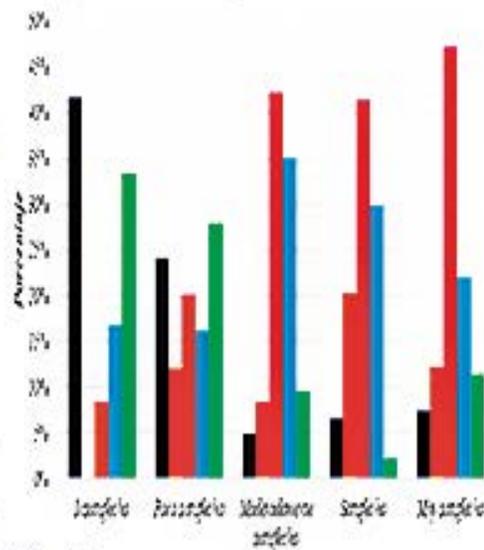
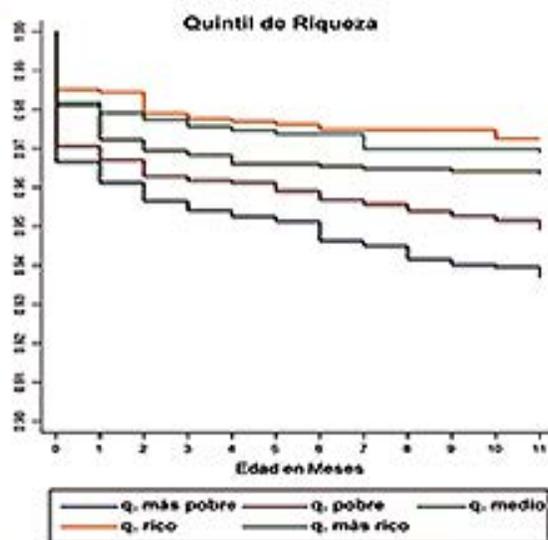
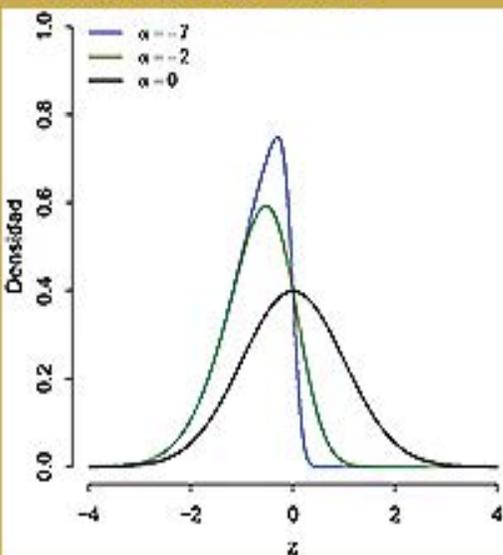


Varianza

Revista del Instituto de Estadística Teórica y Aplicada

ISSN 2789-3529

DOI: <https://doi.org/10.53287/pklv4371tr28c>



$$\begin{aligned}
 &= E[(x - \mu)^2] \\
 &= E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] \\
 &= E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 \\
 &= E[x^2] - \mu^2 \\
 &= E[x^2] - E[x]^2
 \end{aligned}$$

UMSA
 FCPN
 CARRERA
 ESTADÍSTICA

IETA
 Instituto de Estadística
 Teórica y Aplicada



Varianza

Revista de Investigación de la Carrera de Estadística

Publicación del Instituto de Estadística Teórica y Aplicada

Número 20
Octubre, 2022
La Paz - Bolivia

Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Estadística
Instituto de Estadística Teórica y Aplicada (I.E.T.A.)

ISSN 2789-3510 VERSIÓN IMPRESA
ISSN 2789-3529 VERSIÓN EN LÍNEA

DEPÓSITO LEGAL

4-1-285-2021 P.O.

DOI

<https://doi.org/10.53287/pklv4371tr28c>

REVISTA VARIANZA

Nº 20 - Octubre, 2022

DIRECTOR CARRERA DE ESTADÍSTICA

M. Sc. Juan Carlos Flores López

DIRECTOR INSTITUTO DE ESTADÍSTICA TEÓRICA Y APLICADA

M. Sc. Ramiro Coa Clemente

DIAGRAMACIÓN Y DISEÑO

M. Zulema Vargas Cerrudo

Los artículos presentados son entera responsabilidad de los autores

VISIBILIDAD: REVISTAS BOLIVIANAS



La Paz - Bolivia
Edificio Bloque FCPN - Campus Cota Cota
Teléfonos: 2612824 -2612844
Email: ieta@umsa.bo
Página web: <https://ieta.umsa.bo/ediciones-varianza>

COMITÉ EDITORIAL INTERNACIONAL

Lizbeth Román Padilla, Ph.D.

(Estadístico)

Universidad Anáhuac (Norte)

Ciudad de México, México

E-mail: lizroman@hotmail.com

Yolanda M. Gómez Olmos, Dra.

(Estadístico)

Universidad de Atacama

Atacama, Chile

E-mail: yolanda.gomez@uda.cl

Luis M. Castro Cepero, Dr.

(Estadístico)

Pontificia Universidad Católica de Chile

Santiago, Chile

E-mail: mcastro@mat.uc.cl

Diego Gallardo Mateluna, Dr.

(Estadístico)

Universidad de Atacama

Atacama, Chile

E-mail: diego.gallardo@uda.cl

COMITÉ EDITORIAL INTERNACIONAL

Luz Mery González García, Ph.D.

(Estadístico)

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, Colombia

E-mail: lgonzalezg@unal.edu.co

Adriana D'Amelio, Mg.

(Estadístico)

Universidad Nacional de Cuyo

Mendoza, Argentina

E-mail: estat06@hotmail.com

Martha Patricia Bohorquez Castañeda, Ph.D.

(Estadístico)

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, Colombia

E-mail: mpbohorquezc@unal.edu.co

COMITÉ EDITORIAL NACIONAL

María Eugenia Aparicio Torrico, M.Sc.

(Economista)

Universidad Autónoma Juan Misael Saracho UAJMS

Tarija – Bolivia

E-mail: apariciouajms@gmail.com

Arminda Flora Casso Lisarazu, M.Sc.

(Economista)

Universidad Autónoma Juan Misael Saracho UAJMS

Tarija – Bolivia

E-mail: armindacasso@gmail.com

PRESENTACIÓN

La Dirección del Instituto de Estadística Teórica y Aplicada (IETA) tiene la gran satisfacción de presentar a la comunidad de la Carrera de Estadística, a la colectividad de la Universidad Mayor de San Andrés, a los profesionales y en general a la población nacional e internacional, la Edición No 20 de la Revista Varianza.

Como en ediciones previas, la Revista Varianza tiene el propósito de difundir artículos científicos vinculados a la Estadística tanto teórica como aplicada. Es de esta manera que se concreta nuestro pequeño aporte a la actividad científica. Continuaremos con esta importante labor y propenderemos a que nuestra actividad científica tenga cada vez un mayor impacto positivo en el desarrollo de nuestro país, tanto a nivel local como nacional.

Es oportuno informar a los lectores que estamos haciendo todos los esfuerzos por indexar nuestra Revista Varianza en SciELO Bolivia, una colección de revistas científicas electrónicas que forma parte de una de las plataformas de revistas y publicaciones científicas más importantes y reconocidas a nivel internacional, la Red SciELO. En este tránsito hacia la indexación, queremos destacar y agradecer la valiosa colaboración del grupo de profesionales, tanto internacionales como nacionales, que conforma el comité editorial de la Revista Varianza, encargado de la revisión y evaluación de cada uno de los artículos de la presente edición. Igualmente, nuestro agradecimiento a cada uno de los autores de los distintos artículos en la presente edición por difundir su trabajo de investigación científica en nuestra Revista.

Dr(c) Ramiro Coa Clemente

DIRECTOR INSTITUTO DE ESTADÍSTICA TEÓRICA Y APLICADA

ÍNDICE

Afectaciones de los estudiantes debido al COVID-19 en el curso de estadística de primer año de universidad <i>Autores: Roberto Mariano Bula Magallón, Lourdes Carrasquilla & Elisa A. Mendoza González</i>	1
Currícula estadística en Bolivia, cambios en la última década <i>Autores: Álvaro Chirino Gutiérrez, Sherli Mamani & Beatriz Mamani</i>	11
Una introducción al modelo de regresión lineal normal-asimétrico. Parte 1: Teoría, parametrización directa <i>Autor: Omar Chocotea Poca</i>	19
¿Es la educación o la situación económica la principal determinante social de la mortalidad infantil en Bolivia? <i>Autor: Ramiro Coa Clemente</i>	25
El Teorema Central del Límite: Una visión ilustrativa <i>Autor: Raúl León Delgado Álvarez</i>	35
Confiableidad y tiempo óptimo de reemplazo de equipos <i>Autores: Astrid Keitel Ruiz Aviles & Gustavo Ruiz Aranibar</i>	43
Comparación del grado de satisfacción de los estudiantes respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos <i>Autores: Carmen Vega Flores & Dindo Valdez Blanco</i>	59

AFECTACIONES DE LOS ESTUDIANTES DEBIDO AL COVID-19 EN EL CURSO DE ESTADÍSTICA DE PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD

AFFECTATIONS OF STUDENTS DUE TO COVID-19 IN THE STATISTICS COURSE OF THE FIRST YEAR OF UNIVERSITY

Roberto Mariano Bula Magallón¹

Universidad de Panamá, Panamá

✉ roberto.bula@up.ac.pa

Lourdes Carrasquilla²

Universidad de Panamá, Panamá

✉ lpendoza19@gmail.com

Elisa A. Mendoza González³

Universidad de Panamá, Panamá

✉ elisa.mendoza@up.ac.pa

Artículo recibido: 25-08-2022

Artículo aceptado: 27-09-2022

RESUMEN

La pandemia debido al COVID-19 generó importantes afectaciones en todos los sectores particularmente en el de la educación, la salud y en lo socioeconómico en general. En este sentido, se planteó la necesidad de conocer las principales afectaciones que estaban incidiendo en los estudiantes universitarios, toda vez que se observaron deficiencias en el rendimiento académico en los cursos de matemática y estadística. Para esto, se estudió una muestra aleatoria de 64 estudiantes del curso de estadística de primer año de la carrera de Registros Médicos y Estadísticas de Salud quienes completaron un instrumento en línea y cuyas respuestas fueron analizadas mediante el programa Excel y SPSS. Los resultados mostraron que los estudiantes son en mayor proporción de 20 años y más, con responsabilidades familiares, afectados principalmente por el desempleo y problemas económicos

Palabras clave: Clases virtuales, Aprendizajes, Tecnología, Asignaturas, Ciencia.

ABSTRACT

The pandemic due to COVID-19 generated significant effects in all sectors, particularly in education, health and the socioeconomic sector in general. In this sense, the need to know the main affectations that were affecting university students was raised, since deficiencies were observed in academic performance in mathematics and statistics courses. For this, a random sample of 64 students from the first-year statistics course of the Medical Records and Health Statistics career was studied, who completed an online instrument and whose responses were analyzed using the Excel and SPSS programs. The results showed that the students are in a greater proportion of 20 years and older, with family responsibilities, affected mainly by unemployment and economic problems.

Key words: Virtual classes, Learning, Technology, Subjects, Science

¹ Lic. en Estadística, Magister en Estadística Aplicada. Analista y Redacción. Docente de Estadística del Centro Regional Universitario de Colón de la Universidad de Panamá. Consultor estadístico. Docente de Maestría en Métodos Cuantitativos de la Universidad Interamericana de Panamá. ORCID: 0000-0003-4934-0703.

² Licenciada en Ingeniería Estadística. Estudiante de la Maestría en Cálculos y Técnicas Actuariales de la Universidad de Panamá. Manejo y visualización de datos. ORCID: 0000-0001-8480-8573

³ Lic. en Estadística. Magister en Estadística Aplicada. Doctora en Educación con énfasis en Educación a Distancia. Diseño Metodológico y Redacción. Docente de Pregrado y Postgrado de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá. Miembro del Instituto Interamericano de Estadística (IASI). ORCID: 0000-0003-0089-6436

1. INTRODUCCIÓN

En el 2020 el país como en el resto del mundo se vivió una lamentable situación sanitaria que impactó en todos los sectores de nuestra sociedad, incluyendo a la educación. Esto conllevó a que las autoridades educativas hicieran cambios radicales inicialmente improvisados y de emergencia para dar continuidad a los procesos académicos; como el cambio de modalidad, enfoque o metodología de la enseñanza, con el uso de las plataformas tecnológicas y en otros casos la modalidad a distancia o híbrida (García-Suárez, 2021; Sánchez-Pujalte). No se pretende abordar pedagógicamente el concepto ni el accionar de la educación en dicho momento; sin embargo, se destaca el rol de las tecnologías de información y comunicación que permitieron la continuidad de las clases bajo una modalidad virtual (Díaz Guillén, 2021). Bajo este escenario, se analiza las principales afectaciones percibidas por los estudiantes matriculados en el curso de Estadística de primer año de la Carrera de Registros Médicos y Estadísticas de Salud (REMES) del Centro Regional Universitario de Colón, Universidad de Panamá.

La Universidad de Panamá como muchas otras, adaptó rápidamente mecanismos administrativos, regulatorios y tecnológicos lo que conllevó a que la comunidad educativa en general atendiese dichas medidas (Correa, 2021); por ejemplo, los docentes ajustaron las metodologías y actividades de los programas curriculares y, los procesos administrativos se realizaron cien por ciento en línea. Con estas medidas también se estableció la exoneración del pago de la matrícula a todos los estudiantes de pregrado.

En cuanto a las experiencias reportadas por los estudiantes debido a este cambio abrupto se pueden señalar las siguientes: las dificultades en cuanto al acceso a la tecnología, conectividad, problemas con los software y/o plataformas de comunicación y, en otros casos, problemas con la metodología de enseñanza por el escaso dominio de los docentes en el uso de las tecnologías, la poca destreza de los padres de familia y de los propios estudiantes en el uso de las plataformas de conectividad, software y otros (Archer-Svenson, 2020).

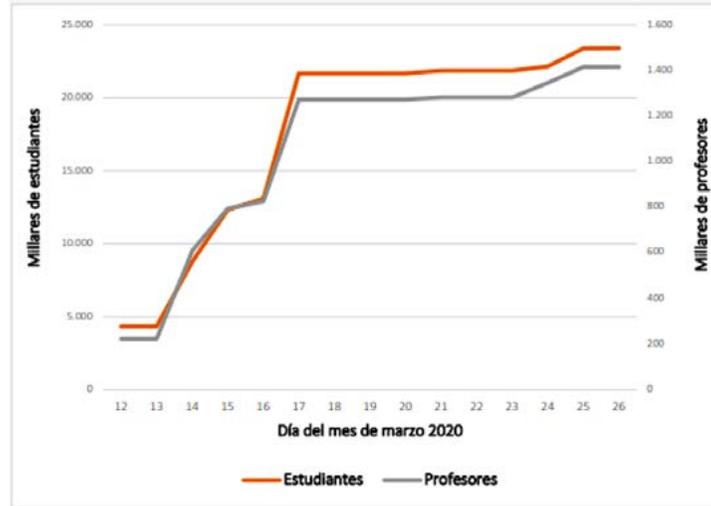
De acuerdo con el informe del Instituto Internacional de la UNESCO para la Educación Superior en América Latina y el Caribe UNESCO IESALC (2020) hubo una afectación importante en estudiantes y profesores en América Latina y el Caribe en más de 23,4 millones de estudiantes de educación superior y más de 1,4 millones de docentes (Figura 1). En el caso particular de los estudiantes, la mayor afectación se relacionó con el receso académico prolongado, las dificultades en la conectividad, la adaptación a nuevas metodologías de enseñanzas y aprendizajes.

Por otro lado, las preocupaciones económicas (afectaciones laborales o de empleabilidad), el impacto en los estudiantes que culminaban un ciclo académico para ingresar en el ciclo de educación superior presentó un nivel de incertidumbre importante durante el 2020 y 2021, afectando en gran medida a los estudiantes en condiciones mayor vulnerabilidad (UNESCO IESALC, 2020).

Afectaciones de los estudiantes debido al COVID-19 en el curso de estadística de primer año de universidad

Figura 1

Estimación del número acumulado de estudiantes (Clasificación Internacional Normalizada de la Educación ISCED, en inglés, 5, 6, 7 y 8) y profesores afectados por la suspensión de clases presenciales durante el mes de marzo de 2020 en América Latina y el Caribe (en millares).



Fuente: UNESCO IESALC, 2020.

A pesar de estas situaciones se incrementó el número de estudiantes matriculados en la Universidad de Panamá, por ejemplo, en el primer semestre de 2020 se matricularon 75 221 estudiantes, y en el primer semestre de 2021 un total de 90 548 (Universidad de Panamá, s.f.). Un incremento evidentemente importante del 20% que podría tener muchos significados desde el punto de vista psicológico y socioeconómico como una oportunidad de ocupar el tiempo libre, aprovechar la virtualidad para la superación personal ante la cesantía laboral, oportunidad de culminar los estudios o simplemente una salida ante la incertidumbre y de continuar estudios superiores (Sánchez-Pujalte, 2021; Robles y Sánchez, 2021).

Sin duda alguna, los estudiantes que ingresaron a la universidad durante el período académico 2021 han vivido buen parte del tiempo bajo estrictas medidas de confinamiento e incluso muchos de ellos completaron el año escolar 2020 en modalidad virtual bajo intensas y agobiantes situaciones de estrés (Robles y Sánchez, 2021). En este contexto, es viable citar a Ruiz Flores y

Martínez Cruz (2021) quienes afirman que la difícil y sorpresiva experiencia vivida por todos generó dos grandes desafíos, tanto en los procesos de enseñar y aprender los mismos contenidos, y la vivencia de estrés, ansiedad, miedos en la comunidad educativa ameritando un acompañamiento gradual para apoyar la salud emocional en el aprendizaje.

En lo que corresponde a la licenciatura de REMES se observó un incremento sustancial en el número de estudiantes matriculados en primer año del primer semestre de 2021 pasando de un promedio anual de 35 a 70 estudiantes por aula. Sin embargo, se observó que un alto índice de estos estudiantes presentó deficiencias en los cursos de matemática y de Estadística I durante el primer y segundo semestre, respectivamente. Aproximadamente, 40% de los estudiantes reprobaron ambos cursos, por lo que surgieron varias preguntas, en torno a las razones de dichas dificultades que a corto plazo podrían incidir en los cursos subsecuentes de estadística e inclusive llevarlos a una deserción universitaria.

Se manejan varias tesis que motivaron a la realización de la investigación: 1) que el incremento en la matrícula de primer año estuvo relacionado con estudiantes recién graduados de la educación media que culminaron sus estudios en modalidad virtual en el año 2020; 2) que las calificaciones promedio de los cursos de matemática de educación media eran inferior a 4.0 (en una escala de 1.0 a 5.0 puntos, empleado en el sistema educativo panameño) lo que podría significar que traían deficiencias previas en conceptos fundamentales de matemática; 3) que presentaron afectaciones en sus hogares, personales o familiares impactando en su rendimiento académico.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Se realiza un estudio de tipo cuantitativo descriptivo considerando como población de estudio a 70 estudiantes de primer año de la carrera de licenciatura de REMES matriculados en el curso de Estadística I del segundo semestre de 2021 del Centro Regional Universitario de Colón. La muestra estuvo conformada por 64 estudiantes, seleccionados aleatoriamente con un nivel de confianza del 95% y 3.5% de error.

Se empleó un instrumento digital diseñado en Formulario de Google que fue enviado a los estudiantes seleccionados aleatoriamente, quienes respondieron el cuestionario bajo la metodología de encuestas online.

El instrumento se estructuró en cuatro secciones: datos demográficos que incluyó las variables de edad, sexo, estado civil, tenencia de hijos, y tipo de colegio de procedencia. La segunda sección recopiló datos sobre las principales afectaciones debido a la pandemia en el contexto personal y familiar. La tercera sobre la percepción en cuanto a su rendimiento académico en diferentes asignaturas de su último año escolar y la última, su percepción respecto a las clases

virtuales en su carrera universitaria.

Se utilizó el índice de confiabilidad Alfa de Cronbach con la finalidad de valorar la consistencia interna del instrumento, específicamente sobre las percepciones académicas, cuyas preguntas se plantearon en escala de Likert de cinco niveles. Si este coeficiente es superior a 0.80 y se acerca a uno (1) indicará mayor confiabilidad o precisión en la medición de dicha variable (Quero Mirla, 2010). En este caso, el resultado del Alfa de Cronbach fue de 0.82 indicando un nivel de confiabilidad o precisión aceptable, puesto que es superior a 0.80.

El análisis realizado fue de tipo descriptivo e inferencial, a través de los programas Excel y SPSS; los resultados se presentan en cuadros, gráficas y otros análisis a través de pruebas no paramétricas.

Es importante destacar que el estudio cumple con los principios bioéticos y de confidencialidad de la identidad de los encuestados.

3. RESULTADOS

De los 64 estudiantes, existe mayor representación de las mujeres (90.6%). En cuanto a la edad, un 31% tiene de 17 a 19 años, 25% de 20 a 24 y el 43% de 25 y más. Esto es importante, ya que los estudiantes que regularmente representan al grupo de recién graduados de educación media o bachillerato en el sistema educativo panameño están en las edades de 17 a 19. En lo que corresponde al estado civil, se determinó que aproximadamente la mitad del grupo está soltero (51.6%), mientras que el resto se encuentra en un estado civil casado (25%) o unido (23.4%); incluso se evidencia que más de la mitad de los estudiantes tienen hijos (53.1%) y en el aspecto académico, que el 78% provienen de centros educativos oficiales. (Tabla 1).

Afectaciones de los estudiantes debido al COVID-19 en el curso de estadística de primer año de universidad

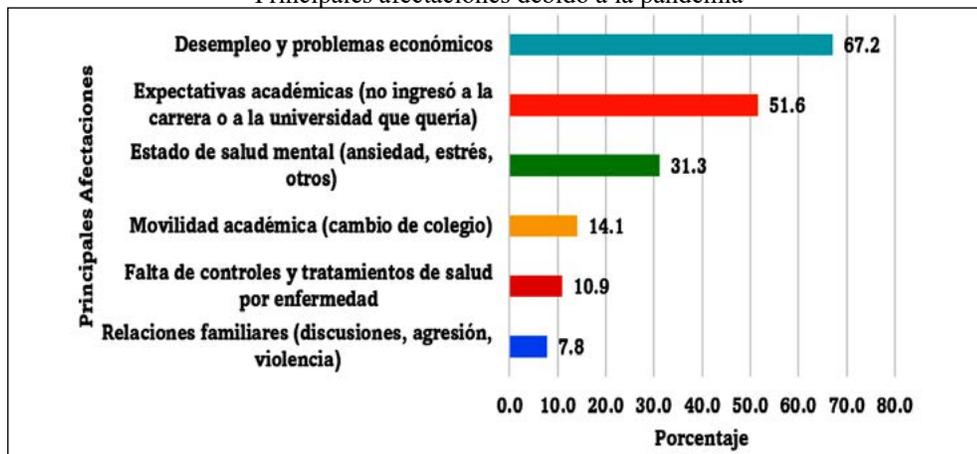
Tabla 1
Características demográficas de la muestra de estudio

Características	No.	%
Total	64	100.0
Sexo		
Hombre	6	9.4
Mujer	58	90.6
Grupo de edad		
17-19	20	31.3
20-24	16	25.0
25-34	19	29.7
35 - más	9	14.1
Estado civil		
Casado	16	25.0
Unido	15	23.4
Soltero	33	51.6
Tiene hijos		
Si	34	53.1
No	30	46.9
Colegio de procedencia		
Oficial o Público	50	78.1
Privado o Particular	14	21.9

Fuente: Elaboración propia

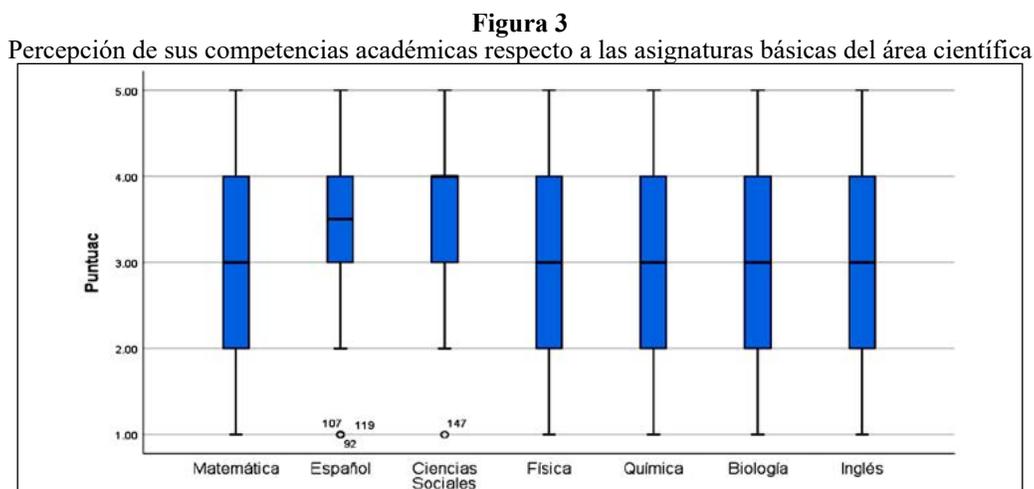
Respecto a las principales afectaciones (Figura 2) reportada por los estudiantes están: las relacionadas con el desempleo y los problemas de tipo económico (67%), seguido por las expectativas académicas, que se refiere al ingreso a una carrera o a una universidad que no era la de primera opción (51.6%), en tercer lugar, el estado de salud mental (ansiedad, estrés, otros) que afectó al 31.3%. También, se debe destacar que, aunque es el menor porcentaje reportado, las afectaciones de violencia doméstica tienen implicaciones sociales importantes, y en este caso, representó el 8%.

Figura 2
Principales afectaciones debido a la pandemia



Fuente: Elaboración propia.

En lo correspondiente a lo académico y la percepción de sus competencias académicas adquiridas en educación secundaria (Figura 3) se pudo conocer que las ciencias sociales y español se situaron con una puntuación superior a tres puntos en la escala Likert de 1 a 5, donde 5, representó el nivel más alto de competencia. Las ciencias sociales sobresalen con una mediana de 4 puntos y un mínimo de 2 y español con 3.5 e igualmente un mínimo de 2; mientras que las restantes: matemática, física, química, biología e inglés, puntúan 3 puntos, e incluso parten de un mínimo de uno en la escala. Los resultados se muestran en la Tabla 2 y evidencian diferencias estadísticas entre las puntuaciones medianas de al menos dos asignaturas (estadístico H-KW con valor $p \cong 0.003$), según el análisis de Kruskal-Wallis que es utilizado para comparar las medianas de más de dos grupos independientes cuando la variable está al menos en escala ordinal.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2.
Resultados de la prueba estadística de Kruskal-Wallis

		Rangos		Estadísticos de prueba^{a,b}	
	Asignatura	N	Rango Promedio		Puntuac
Puntuac.	Matemática	64	211.88	H de Kruskal-Wallis	19.660
	Español	64	249.79	gl	6
	Ciencias Sociales	64	263.85	Sig. asintótica	.003
	Física	64	179.68	a. Prueba de Kruskal Wallis	
	Química	64	205.91	b. Variable de agrupación	
	Biología	64	237.48	Asignatura	
	Inglés	64	222.92		
	Total	448			

Fuente: Elaboración propia

Acompañado a esta auto valoración personal, se les preguntó sobre sus calificaciones promedios en la asignatura de matemática y el promedio final al graduarse del bachillerato, determinándose que en matemática el promedio estuvo en 3.96 con desviación estándar de 0.43 y el promedio final de bachillerato fue de 4.11 con desviación estándar de 0.28, presentando diferencias estadísticas entre ambos promedios ($p < 0.05$), de acuerdo con los resultados de la Tabla 3. Se debe precisar que un promedio de 4 en la escala de 1.0 a 5.0, es aceptable o bueno en nuestro sistema educativo.

Afectaciones de los estudiantes debido al COVID-19 en el curso de estadística de primer año de universidad

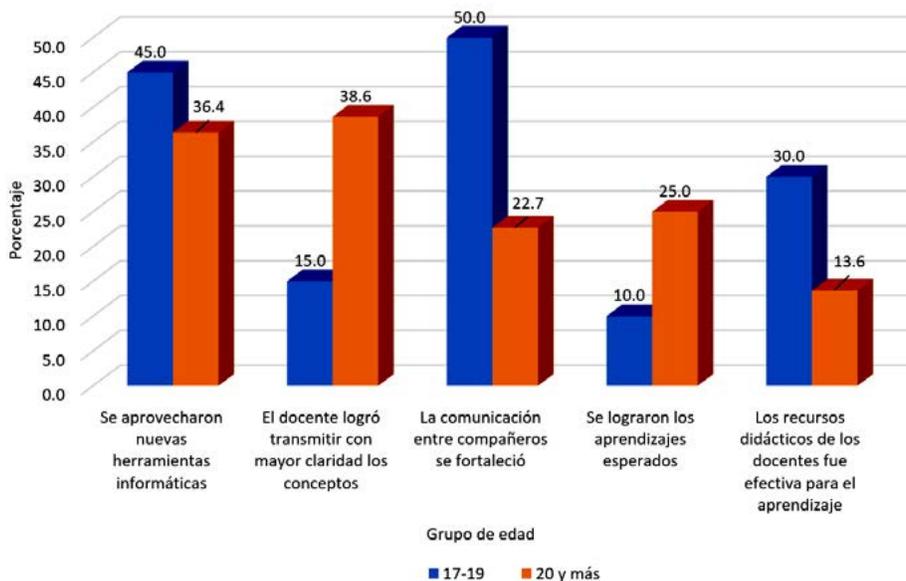
Tabla 3
Estadísticas de muestras emparejadas

		Media	N	Desv. Desviación	Desv. Error promedio	Valor -p
Par 1	Promedio de calificación final de sexto año de secundaria	4.108	63	.2819	.0355	0.001
	Promedio en matemática final de sexto año	3.963	63	.4300	.0542	

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a sus percepciones respecto a la virtualidad se pueden observar sus respuestas, según grupo de edad (Figura 4) y que a propósito se observó diferencias entre las respuestas de los más jóvenes (17 a 19 años) con los de mayor edad (20 y más). Mientras que los primeros destacan en mayor proporción que en las clases virtuales se aprovecharon nuevas herramientas informáticas (45.0%), se fortaleció la comunicación entre compañeros (50.0%) y que los recursos didácticos utilizados por los docentes fue efectivo para el aprendizaje (30.0%); por su parte, los de más edad, resaltan con mayor proporción que los docentes lograron transmitir con mayor claridad los conceptos (38.6%) y que se lograron los aprendizajes esperados (25.0%).

Figura 4
Consideraciones generales sobre la virtualidad en la universidad, según edad



Fuente: Elaboración propia.

4. DISCUSIÓN

La virtualidad resultó ser un medio alternativo para continuar los procesos educativos, y que representó un importante desafío para todos los actores involucrados. Al respecto, la Universidad de Panamá ya había iniciado procesos para el fortalecimiento de las redes de internet, la adaptación de

plataformas tecnológicas y todo lo que involucra la modernización de la tecnología y la comunicación en esta casa de estudios superior, siendo ésta, la de mayor antigüedad y con el mayor número de matrícula en el país (Flores, 2021). La llegada de la pandemia aceleró los procesos, de forma que Moodle,

Classroom y Microsoft Teams fueron las plataformas disponibles para las clases virtuales, siendo estas dos últimas la que más relevancia adquirieron en este tiempo (León et al.)

Por otro lado, según Conde-Carmona (2021) la pandemia evidenció algunas situaciones específicas como la importancia de la presencialidad como un soporte de aprendizaje al darse la oportunidad de interacción entre docentes y estudiantes para concretar ideas, conceptos apoyados en medios tecnológicos; pero además, la necesidad de fortalecer el desarrollo tecnológico y las estrategias didácticas apoyadas en la tecnología, tal como lo visionó Castillo (2003) citado por Bula (2019) al señalar que la universidad debía ir hacia profundas transformaciones que exigen los profesionales con perfiles diferentes, todo esto atendiendo la necesidad de garantizar competencias en todos los contextos que requieren los estudiantes que a esta ingresan.

Por otro lado, se evidenció que el incremento de la matrícula de primeros años no es precisamente debido a los estudiantes recién graduados del bachillerato, sino que corresponden a los estudiantes que reingresan a la universidad a retomar sus estudios. Las motivaciones podrían ser multifactorial. Algunas razones podrían relacionarse con la facilidad de estudiar de forma gratuita dada la exoneración de matrícula y que los estudiantes aprovecharon esta oportunidad que les ofreció la virtualidad, ya que las principales afectaciones de éstos se relacionaron con la pérdida del empleo y los problemas económicos.

En lo académico, se pudo conocer, que pese a que los estudiantes afirmaron haber obtenido calificaciones aceptables en los cursos de matemática y el promedio final de bachillero que lo acredita para ingresar a

carreras del área científica en la universidad, están presentando problemas en los cursos de matemática y estadística, ya que solo 10% de los estudiantes más jóvenes, y 25% de los de 20 y más, afirman haber logrado los aprendizajes esperados. También se pudo conocer que su autovaloración en cuanto a sus competencias en las asignaturas del área científica se ubica en una puntuación mediana inferior respecto a las asignaturas de ciencias sociales y español.

En lo socioeconómico es importante valorar el nivel de responsabilidad familiar de los estudiantes puesto que aproximadamente del 50 por ciento son personas que tienen hijos y/o están casados o unidos.

5. CONCLUSIONES

La pandemia en efecto impactó de muchas formas a la sociedad en donde los sectores económico y educación, además de la salud, generó importantes afectaciones a la población. En particular, los estudiantes que ingresaron a estudiar Registros Médicos y Estadísticas de Salud aprovecharon la oportunidad de ingresar a una carrera universitaria de forma gratuita. Esto evidencia en alguna medida el importante incremento de la matrícula, sin embargo, no fue fácil adaptarse a la virtualidad, y en particular en los cursos de matemática y estadística, toda vez que los mismos reconocen mayores competencias en asignaturas del área social que las científicas, y por otro lado, que la mayoría de estos cuentan con alguna afectación relacionada con sus responsabilidades familiares.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Archer-Svenson, N. Y De Gracia, G. (2020). *Educación Superior y Covid-19 en la República de Panamá*. Academia.edu. Visto en: https://www.academia.edu/43632496/educaci%c3%93n_superior_y_covid_19_en_la_rep%c3%9ablica_de_panam%c3%81?from=cover_page
- Bula, R. y Larriva, M. *Una mirada al comportamiento de la matrícula Universidad de Panamá*. Revista Saberes Apudep. 2(2) pp.15-20
- Conde-Carmona, R. J., Fontalvo Meléndez, A. A., & Padilla-Escorcía, I. A. (2021). *El uso de la tecnología en la enseñanza del límite, para el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria en tiempos de Pandemia*. Revista Educación y Ciudad, (41), 147-170. <https://doi.org/10.36737/01230425.n41.2496>
- Correa, G. Y Terreros Barrios, N. (2021). *Aprendizaje y Buenas prácticas sobre pandemia en educación superior en Panamá, en Educación Superior y Pandemia*. Edo-Serveis – Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de: https://ddd.uab.cat/pub/caplli/2021/258544/Informe_13_redage_2021_v2p131.pdf
- Díaz Guillen, P. A., Andrade Arango, Y., Hincapié Zuleta, A. M. ., & Uribe Uran, A. P. . (2021). *Análisis del proceso metodológico en programas de educación superior en modalidad virtual*. Revista de Educación a Distancia (RED), 21(65). <https://doi.org/10.6018/red.450711> (Original work published 16 de octubre de 2020)
- Flores, EF. (2021). *Universidad de Panamá: abordaje de la crisis sanitaria de la covid-19*, en Escalante, R. (Coord.) Universidades en Pandemia. Volumen 1, Rectores. Pp. 173-189 http://www.dspace.uce.edu.ec:8080/bitstream/25000/24868/1/21%20ESCALANTE%20universidades_pandemia_rectores.pdf#page=173
- García-Suárez, V. (2021) *En línea, a distancia o remota, pero no virtual. Controversias y Concurrencias Latinoamericanas*, 12(22), 237-253. Recuperado a partir de <http://ojs.sociologia-alas.org/index.php/cyc/article/view/252>
- León, M., López de Ramos, A., Mapp, U., Reyes, S., Suárez, M., Pacheco, A., Rangel, C., De Las Salas, M., Carrasquero, E. (2021). *Evaluación de las plataformas de aprendizaje virtual usadas en universidades de Panamá*. DOI: <https://doi.org/10.37387/ipc.v9i1.210>
- Quero Virla, M. (2010). *Confiabilidad y coeficiente Alpha de Cronbach*. Revista de Estudios Interdisciplinarios en Ciencias Sociales. 12(2), 248-252 Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/993/99315569010.pdf>
- Ruiz Flores, L. Y Martínez Cruz, J.M. (Coords.) (2021). *Educación socioemocional*. Universidad Intercontinental, A.C.
- Sánchez-Pujalte, L., Gómez Yepes, T. ., Albalá Genol , M. ., & Etchezahar, E. . (2021). *Percepción del profesorado y del alumnado universitario argentino sobre la adaptación a la educación virtual durante la pandemia por*

COVID-19. Calidad De Vida Y Salud, 14(2), 2-14. Recuperado a partir de <http://revistacdvs.uflo.edu.ar/index.php/cdvuflo/article/view/353>

UNESCO – IESALC (2021). *COVID-19 y educación superior: de los efectos inmediatos al día después*. Análisis de impactos, respuestas políticas y recomendaciones.

Universidad de Panamá (s.f.). *Upencifras*. Recuperado de <https://www.up.ac.pa/cifrasmatricula>

CURRÍCULA ESTADÍSTICA EN BOLIVIA, CAMBIOS EN LA ÚLTIMA DÉCADA

STATISTICAL CURRICULUM IN BOLIVIA, CHANGES IN THE LAST DECADE

Álvaro Limber Chirino Gutiérrez¹

Carrera de Estadística, Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia

✉ achirinog@fcpn.edu.bo

Sherli Reyna Mamani²

Fundación ARU, Bolivia

✉ smamani@aru.org.bo

Beatriz Mamani³

Fundación ARU, Bolivia

✉ bmamani@aru.org.bo

Artículo recibido: 16-08-2022

Artículo aceptado: 03-10-2022

RESUMEN

El presente documento presenta el desarrollo de la currícula estadística en el sistema escolar y universitario en Bolivia, se realiza una revisión de la normativa vigente, se describe los contenidos vinculados a la estadística en el ciclo primario y secundario. Para el pregrado en la universidad se describe el proceso del último plan de estudios en la Universidad Mayor de San Andrés y se incluye el perfil estadístico descrito mediante entrevistas a los directores de carrera de las 2 únicas universidades que ofrecen el programa en estadística.

Palabras clave: Currícula, alfabetización estadística, Bolivia.

ABSTRACT

This document presents the development of the statistical curriculum in the school and university system in Bolivia, a review of the current regulations is carried out, the contents related to statistics in the primary and secondary cycle are described. For the undergraduate at the university, the process of the last study plan at the Universidad Mayor de San Andrés is described and the statistical profile described through interviews with the career directors of the only 2 universities that offer the program in statistics is included.

Key words: Curriculum, statistical literacy, Bolivia.

1. MOTIVACIÓN

La Estadística en Bolivia tiene un desarrollo aún temprano en varias áreas; en cuanto al Índice de Capacidad Estadística Nacional se encuentra por debajo de la media global

(Dargent et al. (2018)), sin embargo, han existido avances en cuanto al fortalecimiento institucional tal como lo expresa Clark et al. (2020) “Bolivia ha ido cimentando su camino de robustecimiento institucional en el ámbito estadístico” aunque aún la normativa no

¹ Profesional en Estadística, con una maestría en modelaje matemático. Fundación Aru <https://orcid.org/0000-0001-8686-7702>.

² Egresada en Estadística. Fundación Aru. <https://orcid.org/0000-0002-7143-3271>

³ Egresada en Estadística. Fundación Aru. <https://orcid.org/0000-0002-6639-7659>

vincula a las instituciones vinculadas con el que hacer estadístico con las universidades o sistema educativo como un mecanismo para fortalecer el capital humano, tal como sí sucede en Chile, El Salvador, Guatemala y Perú (Clark et al. (2020)).

La enseñanza de la Estadística dentro del sistema educativo estuvo concentrada principalmente en las universidades hasta la promulgación de la ley educativa Avelino Siñani (Plurinacional (2010)) que desarrollo contenidos curriculares que ya incluía la enseñanza de la Estadística a nivel primario y secundario.

En cuanto a las universidades en Bolivia, a la fecha existen dos que ofrecen el pregrado en Estadística, siendo el programa más antiguo la Carrera de Estadística de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) que se creó en 1984.

Describir, documentar y comprender el estado actual de la currícula estadística en Bolivia es un aspecto importante para conocer y contrastar con la región los avances y adaptaciones sobre la currícula estadística, siendo este el primer documento con esta temática que se genera en Bolivia, más aún en esta época donde existe una explosión de conocimiento debido a las oportunidades que genera el *Big Data*, tal como se describe en el rol del *Big Data* del Grupo de Trabajo Global (GWG) sobre *Big Data* para Estadísticas Oficiales que fue creado en 2014: “*El potencial de las fuentes de Big Data radica en la disponibilidad oportuna de grandes cantidades de datos que son generados a bajo costo. Para acceder a este potencial, herramientas y métodos apropiados para procesar, almacenar y el análisis de Big Data son necesarios*”

2. ESTADO ACTUAL DE LA CURRÍCULA ESCOLAR Y UNIVERSITARIA

La enseñanza de la Estadística en el nivel secundario de la escuela tiene una larga tradición en países como Francia, España y el Reino Unido. Sin embargo, dado que la Estadística ha llegado a incrementar su importancia en la sociedad moderna, la relevancia de desarrollar el pensamiento estadístico en los estudiantes de todos los niveles de educación es creciente. Consecuentemente, las nuevas currículas en muchos países como Brasil, Costa Rica, Sud África, España, Emiratos Árabe Unidos y los Estados Unidos incluyen a la Estadística desde los primeros años de Primaria⁴.

En Bolivia la enseñanza de la Estadística está incluida en el ciclo de secundaria como parte de la currícula de Matemática; aquí se abordan temas que van desde el levantamiento de datos estadísticos, su análisis, su aplicabilidad en el reordenamiento territorial, la creación de gráficos y tablas, el trabajo con estadísticas de tendencia central, el cálculo de probabilidades, la estadística inferencial y el uso de programas estadísticos, etc. Estos temas son relevantes en la medida en que su correcta aplicación lleva al estudiante a desarrollar un pensamiento crítico y objetivo de su propia realidad, preparándolo además para su futura incursión en la educación superior donde la Estadística está presente de manera transversal en casi la totalidad de las carreras en las universidades del País.

Por otra parte, la constitución política del estado plurinacional (Art. 300, 302) y la ley marco de autonomías establecen que una de las competencias de los gobiernos sub nacionales es la generación de sus estadísticas locales, lo que por ende requiere capital

⁴ Batanero et al. (2011)

humano con conocimientos estadísticos en todos los gobiernos sub nacionales del país. Sin embargo, una realidad es que sólo se forman profesionales en Estadística en dos universidades; la Universidad Mayor de San Andrés de La Paz y la Universidad Tomas Frías de Potosí.

En este apartado se describe de manera sintética el estado actual de la currícula para la educación primaria, secundaria y universitaria. Para el ciclo primario y secundario se introdujo por primera vez conceptos vinculados a la Estadística a partir de la ley Avelino Siñani promulgada en 2010.

3. EDUCACIÓN PRIMARIA

En la educación primaria la Estadística se centra en el eje articulador de Ciencia, tecnología y producción, en la dimensión de decidir de las dimensiones establecidas del ser, saber, hacer y decidir que se establece en la currícula según Aguilar et al. (2014). A continuación, se lista por curso, el bimestre y el contenido vinculado a estadística del ciclo primario.

- Primero de primaria:
 - Contenido, tercer bimestre: Tratamiento de la información (Estadística de la familia y escuela representación gráfica y barras sencillas)
- Quinto de primaria:
 - Contenido, segundo bimestre: Muestra estadística y distribución simple de frecuencias
 - Contenido, tercer bimestre: Muestra estadística y distribución compuesta de frecuencias
 - Contenido, cuarto bimestre:

Estadística del consumo de alimentos de la población con base en la descripción de la información

- Sexto de primaria:
 - Contenido, cuarto bimestre: Tablas estadísticas; gráficas lineales, circulares y de barra aplicados en el mercado local y nacional

4. EDUCACIÓN SECUNDARIA

En la educación secundaria la Estadística se centra en el área de Matemática según Fernández et al. (2014). A continuación, se lista por curso el contenido vinculado a Estadística del ciclo secundario.

- Primero de secundaria:
 - Dimensión: Decidir
 - Bimestre: Primer y segundo
 - Eje: Levantamiento de datos estadísticos en procesos productivos y sociales
 - Contenido: Recolección de datos de las vocaciones y potencialidades productivas de la comunidad.
 - Bimestre: Tercer y cuarto
 - Eje: Levantamiento de datos estadísticos en procesos productivos y sociales
 - Contenido: Recolección de datos de las vocaciones y potencialidades productivas de la comunidad, tabulación de datos, gráficos, tablas y su interpretación de las potencialidades productivas de la región, tabulación de datos.

- Tercero de secundaria: en los fenómenos socioculturales.
 - Dimensión: Decidir
 - Bimestre: Primer y segundo
 - Eje: La Estadística en procesos productivos y sociales
 - Contenido: Método estadístico, representaciones gráficas
 - Bimestre: Tercer y cuarto
 - Eje: La Estadística en procesos productivos y sociales
 - Contenido: Medidas de tendencia central, media mediana y moda, desviación estándar.
- Quinto de secundaria:
 - Dimensión: Decidir
 - Bimestre: Primer y segundo
 - Eje: Estadística aplicada, actividades socioproductivas
 - Contenido: Datos análisis, representación gráfica e interpretación, manejo de software SPSS, GRAPHER, MATLAB y otros.
 - Bimestre: Tercer y cuarto
 - Eje: La Estadística como estudio de campo
 - Contenido: Estadística y el reordenamiento territorial, distribuciones de frecuencias,
- Sexto de secundaria:
 - Dimensión: Decidir
 - Bimestre: Primer y segundo
 - Eje: Estadística inferencial
 - Contenido: Probabilidades, Conceptos básicos, propiedades y aplicaciones

5. EDUCACIÓN UNIVERSITARIA: PREGRADO

Hoy en día Bolivia cuenta con dos casas de Estudios Superiores que tienen la Carrera de Estadística; la Universidad Mayor de San Andrés localizada en el departamento de La Paz y la Universidad Tomas Frías en el departamento de Potosí; ambas instituciones independientes ya hace más de 30 años, con raíces del área Matemática, forjada con el ánimo de proponer a la sociedad profesionales que puedan contribuir con el buen uso y análisis de la información y adentrados al campo de investigación. Ambas carreras empezaron estrechamente enlazadas a la Carrera de Matemáticas.

La Carrera de Estadística de la Universidad Autónoma Tomas Frías inicio como una mención en la Carrera de Matemáticas contando con un plan de estudios diferenciado, fue el año 1992 que inició a trabajar como carrera independiente, en el caso de la Universidad Mayor de San Andrés la Carrera de Estadística inicia en 1984.

Algunas características de estos 2 programas son:

- Universidad Mayor de San Andrés

Currícula estadística en Bolivia, cambios en la última década

- Inicio del programa: 1984
 - Semestres: 8
 - Matriculados 2021: 270
 - Nuevos matriculados 2021: 53
 - Titulados 2021: 3
 - Total docentes 2022: 12
 - Último plan de estudio: 2021
- Universidad Autónoma Tomas Frías
 - Inicio del programa: 1992
 - Semestres: 10
 - Matriculados 2018: 146
 - Nuevos matriculados 2011: 35
 - Titulados 2011: 4
 - Total docentes 2018: 10
 - Último plan de estudio: 2015

6. CAMBIOS EN LA ERA DEL *BIG DATA*

Los principales cambios que se dieron en los últimos años ocurrieron en las universidades dentro de los programas de pregrado, estos cambios fueron motivados principalmente por las exigencias de los tiempos y la fuerte presencia de la ciencia de datos y el *Big Data* debido al desarrollo tecnológico actual.

A continuación, se presenta el perfil del estadístico actual desde el punto de vista de ambas universidades, para elaborar este perfil se realizaron entrevistas a los directores de carrera de los programas vigentes. Las entrevistas se realizaron en el primer trimestre de 2022. Luego del perfil

se describe la experiencia de la Universidad Mayor de San Andrés en el desarrollo del último plan de estudio.

7. PERFIL DEL ESTADÍSTICO

Para conocer el perfil del profesional estadístico actual, se realizaron entrevistas a los directores de Carrera de Estadística de los dos programas de pregrado existentes. Las principales características se pueden resumir en:

- M.Sc. Juan Carlos Flores, Universidad Mayor de San Andrés
 - Se forman profesionales con buena base Matemática ya que antes eran parte de esa carrera y aún se conserva ese perfil.
 - Los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar en proyectos de investigación y poder publicarlos, la carrera cuenta con una revista propia: Varianza.
 - La inquietud del profesional está abocada al buen manejo del tratamiento de datos
 - Los cambios de planes y mallas curriculares están dirigidos a incorporar al profesional en la era del *Big Data*, con la incorporación de materias que promueven ese objetivo
- Mg. Sc. Mario Soto, Universidad Autónoma Tomas Frías
 - Con el nuevo modelo académico de formación por competencias los estudiantes son formados de manera idónea con habilidades para la elaboración, análisis e interpretación de bases de datos y

la toma de decisiones

- El profesional está preparado para realizar un análisis estadístico de información en diversos tipos de instituciones.
- Los profesionales estadísticos tienen la oportunidad de trabajar en la parte docente y en la parte de investigación en casas de estudios superiores como la Universidad de San Francisco Xavier de Chuquisaca.
- La actualización de la malla curricular introduce materias nuevas para el análisis científico de datos a través de la programación y el manejo de diversos programas estadísticos.

8. EXPERIENCIA DE LA UMSA PARA EL PLAN DE ESTUDIO 2021

A continuación, se listan los planes de estudio que existieron en la Carrera de Estadística en la UMSA:

- El primer Plan de Estudios se dió en 1972 cuya documentación se reduce a un listado de asignaturas que se diferenciaba poco del Plan de Estudios de la Carrera de Matemática e Informática.
- Segundo Plan de Estudios: 1978 cuya documentación existente refleja la dependencia del Departamento de Matemática.
- Tercer Plan de Estudios: 1982 con documentación existente, la cual muestra ya una diferencia notable a los Planes de las Carreras de Matemática e Informática.
- Cuarto Plan de Estudios: Pensum 1988 el cual según documentación tiene una

vigencia de data de 1986 con algunas reformas introducidas por el Seminario Académico Facultativo.

- Quinto Plan de Estudios: Pensum 1997 en el cual se muestra el resultado de proyectos que han ido madurando desde las Jornadas Académicas de 1993 y consolidadas en 1995.
- Sexto Plan de Estudios: Pensum 2007 introduce novedosas reformas, especialmente en la parte práctica.
- Séptimo Plan de Estudios: Pensum 2012 mantiene muchas características del plan anterior, se reduce la dependencia que se tenía respecto a otras carreras que ofrecían materias de servicio u optativas a los estudiantes.
- Octavo Plan de Estudios: Pensum 2021, inclusión del enfoque de ciencia de datos y *Big Data*.

Una característica importante en el proceso de construcción en el último plan de estudios fue que se siguieron las recomendaciones de ASA (2014), incluyendo áreas vinculadas a la programación estadística y la ciencia de datos, las áreas establecidas en el plan de estudios junto con las materias que la componen.

- Área Matemática: Álgebra, álgebra lineal y cálculo
- Área de probabilidad e inferencia: Probabilidad, teoría de probabilidad e inferencia estadística
- Área estadística y muestreo: Descriptiva, muestreo, procesamiento y análisis estadísticos
- Área de optimización: Investigación operativa

Currícula estadística en Bolivia, cambios en la última década

- Área de modelos lineales y lineales generalizados: Modelos lineales, diseños experimentales, datos categóricos
 - Área de análisis multivariante: Análisis matricial, métodos multivariados
 - Área de complementación estadística: No paramétrica, bayesiana, demografía
 - Área de procesos estocásticos y series de tiempo: Procesos estocásticos y series de tiempo
 - Área de estadística y computación: Programación, programación estadística, estadística computacional
 - Área de ciencia de datos: Análisis de datos masivos (*Big Data*), minería de datos, visualización de datos
 - Área de metodología: Metodología de la investigación, taller de grado
 - Área de Estadística aplicada: Epidemiología, control de calidad, actuarial
- fortalecimiento del capital humano que se genera en el sistema escolar y universitario.
- Falta construir normativas que permitan conectar las necesidades de las instituciones del estado con las capacidades que se desarrollan en las universidades
 - Se cuenta con un documento que describe el estado actual de la currícula estadística en Bolivia

Recomendaciones

- Es importante hacer un seguimiento a los nuevos procesos de avance en la Currícula Estadística
- Para fortalecer la currícula de los ciclos de primaria y secundaria se recomienda generar material didáctico que apoye el trabajo de los profesores y permita establecer de manera uniforme un avance según los ciclos de formación
- Es importante que las dos universidades que ofrecen el programa de Estadística puedan generar alianzas, con el fin de trabajar en; estrategias de difusión, fortalecimiento de la alfabetización estadística, jornadas académicas para fortalecer los planes de estudio y mecanismos para conectar la currícula estadística con la demanda de las instituciones del estado.

Las materias dentro de las áreas se organizan en tres ciclos, el básico, de formación y de profesionalización. Otro cambio importante es la posibilidad de hacer un artículo de investigación que sea posteriormente presentada a una revista arbitrada como modalidad de graduación. En este proceso de actualización del plan de estudios contribuyeron docentes, estudiantes y profesionales del área.

9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

- Bolivia se encuentra en un proceso de crecimiento para el

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Aguilar, R., Quiroz, J., Ayma, S., Canqui, A., Tambo, C., Ayaviri, C., Soliz, G., & Lopez, I. (2014). *Programa de estudio, primero a sexto año de escolaridad primaria*. Ministerio de Educación.
- ASA. (2014). Curriculum guidelines for undergraduate programs in statistical science. ASA, 2, 2005. www.amstat.org/education/curriculumguidelines.cfm.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education*. International commission on Mathematical instruction. <http://www.mathunion.org/ICMI/>
- Clark, X., Zaror, D., & Mejia, J. A. (2020). *Marcos legales estadísticos en América Latina. Realidades, mejoras prácticas y recomendaciones*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Dargent, E., Lotta, G., Mejía, A., & Moncada, G. (2018). *¿A quién le importa saber? La economía política de la capacidad estadística en América Latina*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Fernández, J. J. Q., Delgadillo, R. C., Pinaya, V., Gregorio, F., Pacasi, A., Aliaga, E., Andrés, Z., Estrada, A., Ayaviri, R., César, Á., Huanca, C., Flores, J. C., Loyola, S., Víctor, E., Guerrero, P., Salas, L., Gróver, T., & Domínguez, T. (2014). *Programa de estudio, primero a sexto año de escolaridad secundaria*. Ministerio de educación.
- Plurinacional, A. L. (2010). *Ley de la educación: Avelino Siñani - Elizardo Pérez*. Asamblea Legislativa Plurinacional. www.gacetaoficialdebolivia.gob.bo

UNA INTRODUCCIÓN AL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL NORMAL-ASIMÉTRICO. PARTE 1: TEORÍA, PARAMETRIZACIÓN DIRECTA

AN INTRODUCTION TO THE NORMAL-SKEW LINEAR REGRESSION MODEL. PART 1: THEORY, DIRECT PARAMETERIZATION

Omar Chocotea Poca¹

Carrera de Estadística, Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia

✉ ochocoteap@fcpn.edu.bo

Artículo recibido: 13-08-2022

Artículo aceptado: 22-09-2022

RESUMEN

En el espectro de las distribuciones elípticas-asimétricas se encuentra la distribución normal-asimétrica que tiene como caso particular a la distribución normal. El objetivo principal de este trabajo es presentar al modelo de regresión lineal con variable aleatoria de error con distribución normal-asimétrica. Este trabajo se divide en tres partes. En esta parte, se revisa los aspectos teóricos base asociados con la parametrización directa. En la Parte 2, se revisa los aspectos teóricos base asociados con la parametrización centrada. Y en la Parte 3, se efectúa la ilustración con un conjunto de datos reales.

Palabras clave: Distribuciones elípticas-asimétricas; Distribución normal-asimétrica; Modelo de regresión lineal.

ABSTRACT

In the spectrum of elliptic-asymmetric distributions is the skew-normal distribution, which has the normal distribution as a particular case. The main objective of this work is to present the linear regression model with random error variable with skew-normal distribution. This work is divided into three parts. In this part, the basic theoretical aspects associated with direct parameterization are reviewed. In Part 2, the basic theoretical aspects associated with centered parameterization are reviewed. And in Part 3, the illustration is done with a real data set.

Key words: Elliptic-asymmetric distributions; Skew-normal distribution; Linear regression model

1. INTRODUCCIÓN

El modelo de regresión lineal (MRL) permite modelar la función de regresión como una combinación lineal de covariables. La teoría del MRL está bien establecida. Además, el MRL es la base de muchas herramientas de modelado modernas. Por ejemplo, Naseem et al. (2010) presentan un enfoque novedoso de identificación de rostros mediante la formulación del problema de reconocimiento

de patrones en términos del MRL.

Azzalini & Capitanio (1999), Sahu et al. (2003), Rubio & Genton (2016) y Ferreira et al. (2018) entre otros reportan que el supuesto clásico de normalidad de los errores resulta restrictivo en situaciones donde se evidencia asimetría para los datos

Para superar este posible inconveniente, en este de trabajo dividido en tres partes, se

¹ ORCID: 0000-0002-6490-7491.

presenta una introducción al MRL normal-asimétrico bajo la distribución normal-asimétrica de Azzalini (1985), siguiendo los trabajos de Azzalini (1985), Azzalini & Capitanio (1999), y Azzalini & Capitanio (2014). Este modelo anida al MRL habitual.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2, revisa los momentos de la distribución normal-asimétrica. La sección 3, define la formulación del modelo con la parametrización directa. Finalmente, la Sección 4, revisa la inferencia por el método de máxima verosimilitud hasta obtener la matriz de información.

2. MOMENTOS

El Lema 1 de Azzalini (1985) permite producir la función de densidad de la normal-asimétrica.

Una v.a. z tiene una distribución normal-asimétrica estándar con parámetro de asimetría $\alpha \in \mathbb{R}$ y representaremos por $z \sim \text{NA}(\alpha)$, si su función de densidad está dada por

$$\varphi(z; \alpha) = 2\varphi(z)\Phi(\alpha z),$$

donde $\varphi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ denotan la función de densidad y función de distribución de la distribución normal estándar, respectivamente. La apariencia gráfica de la función de densidad de la $\text{NA}(\alpha)$ se muestra en la Figura 1 para algunos valores de α .

Para valores negativos de α se tiene una distribución asimétrica a la izquierda, y para valores positivos de α se tiene una distribución asimétrica a la derecha.

Son varias las propiedades que se derivan inmediatamente de la definición anterior. Si $z \sim \text{NA}(\alpha)$, se cumplen las siguientes propiedades:

- a) $\varphi(z; 0) = \varphi(z)$ para todo z ;
- b) $-z \sim \text{NA}(-\alpha)$; y
- c) $z^2 \sim \chi_1^2$, independientemente de α .

La función generatriz de cumulantes de $z \sim \text{NA}(\alpha)$ es

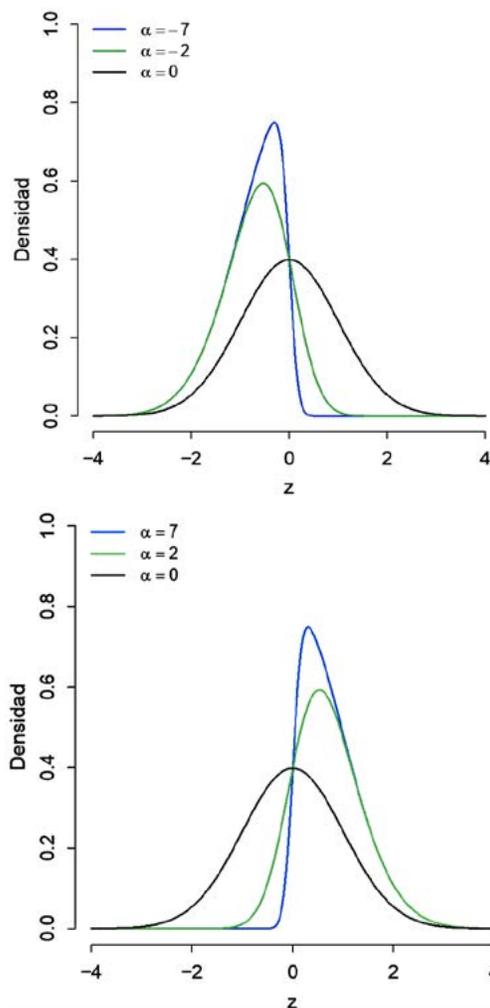
$$\text{fgc}_z(t) = \frac{1}{2}t^2 + \zeta_0(\delta t),$$

donde $\delta = \delta(\alpha) = \alpha/\sqrt{1 + \alpha^2} \in [-1, 1]$ y

$$\zeta_0(x) = \log\{2\Phi(x)\}.$$

Figura 1

Función de densidad de la $\text{NA}(\alpha)$ para algunos valores de α .



Fuente: Elaboración propia

Una introducción al modelo de regresión lineal normal-asimétrico. Parte 1: Teoría, parametrización directa

El siguiente resultado se utilizará en la última sección.

Si

$$\zeta_r(x) = \frac{d^r}{dx^r} \zeta_0(x)$$

con $r = 1, 2, \dots$. Entonces

$$\zeta_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

$$\zeta_2(x) = -\zeta_1(x)\{x + \zeta_1(x)\},$$

$$\zeta_3(x) = -\zeta_2(x)\{x + \zeta_1(x)\} - \zeta_1(x)\{1 + \zeta_2(x)\},$$

$$\zeta_4(x) = -\zeta_3(x)\{x + 2\zeta_1(x)\} - 2\zeta_2(x)\{1 + \zeta_2(x)\}.$$

y

$$\zeta_1(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\zeta_2(0) = -\zeta_1^2(0),$$

$$\zeta_3(0) = 2\zeta_1^3(0) - \zeta_1(0),$$

$$\zeta_4(0) = -6\zeta_1^4(0) + 4\zeta_1^2(0).$$

En consecuencia: la esperanza y la varianza están dadas por

$$\mu_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta$$

y

$$\sigma_z^2 = 1 - \frac{2}{\pi} \delta^2,$$

respectivamente; y los coeficientes de asimetría y curtosis están dados por

$$\gamma_1 = \frac{4 - \pi}{2} \left(\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right)^3$$

y

$$\gamma_2 = 2(\pi - 3) \left(\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right)^4,$$

respectivamente.

El coeficiente de asimetría es una función impar, y el coeficiente de curtosis es una función par. Efectuando una evaluación de los valores mínimo y/o máximo de los coeficientes de asimetría y curtosis, se tiene que los coeficientes de asimetría y curtosis varían en los intervalos $[-0.995; 0.995]$ y $[0; 0.869]$, respectivamente.

De acuerdo con la teoría de la familia de localización-escala (ver, por ejemplo, Lehmann & Casella, 1998, p. 17), la distribución normal-asimétrica con parámetro de localización $\xi \in \mathbb{R}$ parámetro de escala $\omega > 0$ y parámetro de asimetría α se genera con la transformación

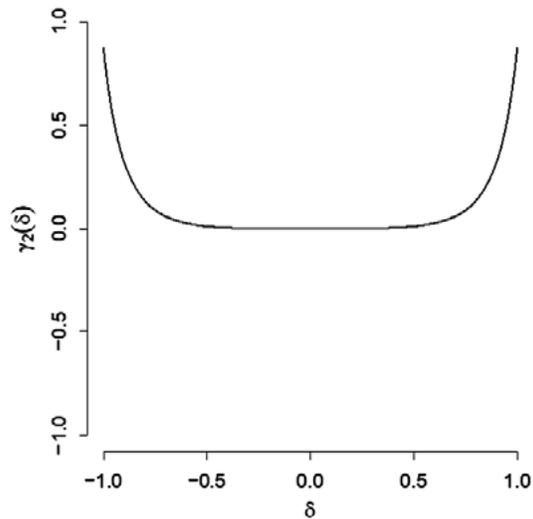
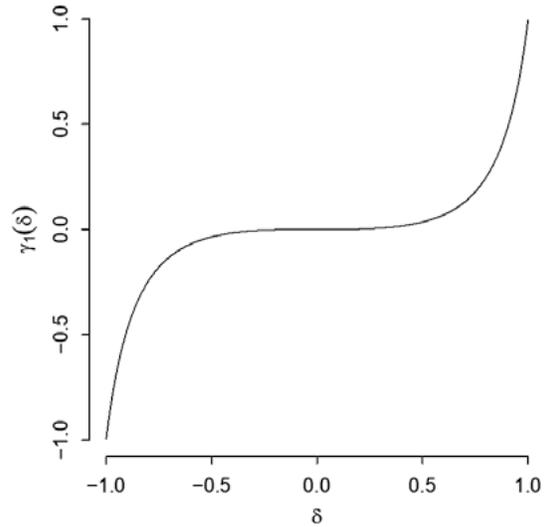
$$y = \xi + \omega z,$$

y representaremos por $y \sim \text{NA}(\xi, \omega^2, \alpha)$, si su función de densidad es

$$\frac{2}{\omega} \varphi\left(\frac{y - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha \frac{y - \xi}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \varphi\left(\frac{y - \xi}{\omega}; \alpha\right).$$

Figura 2

Coeficientes de asimetría y curtosis de la $\text{NA}(\alpha)$.



Fuente: Elaboración propia

A continuación, con base en la anterior transformación se extiende las características de la de $NA(\alpha)$.

Si $y \sim NA(\xi, \omega^2, \alpha)$, se cumplen las siguientes propiedades:

- a) $\varphi(y; \xi, \omega^2, 0) = \varphi(y; \xi, \omega^2)$ para todo y ;
- b) $-y \sim NA(-\xi, \omega^2, -\alpha)$;
- c) $(y - \xi) / \omega \sim NA(\alpha)$;
- d) $\{(y - \xi)/\omega\}^2 \sim \chi_1^2$, independientemente de α .

La esperanza y la varianza de la $NA(\xi, \omega^2, \alpha)$ son

$$\mu_y = \xi + \omega\mu_z$$

y

$$\sigma_y^2 = \omega^2 \sigma_z^2,$$

respectivamente. Los coeficientes de asimetría y curtosis de la $NA(\xi, \omega^2, \alpha)$ son iguales a los coeficientes de asimetría y curtosis de la $NA(\alpha)$, respectivamente.

3. FORMULACIÓN

La sección modifica el supuesto del MRL habitual, en formulación.

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vector de variables aleatorias independientes, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})^T \in \mathbb{R}^k$ un vector de covariables donde x_{i1} es igual a uno (corresponde a una intersección), $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^T \in \mathbb{R}^k$ un vector de coeficientes de regresión, y $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vector de errores aleatorios independientes tales que $\epsilon_i \sim NA(\alpha)$,

$$\varphi(\epsilon_i; \alpha) = 2\varphi(\epsilon_i) \Phi(\alpha \epsilon_i),$$

con $i = 1, \dots, n$. Suponiendo x_i completamente observado, el i -ésimo predictor lineal es $x_i^T \boldsymbol{\beta}$. El modelo de regresión lineal normal-asimétrico vía parametrización directa está

dado por

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \omega \epsilon_i.$$

La función de densidad de y_i es

$$\frac{2}{\omega} \varphi(z_i) \Phi(\alpha z_i),$$

donde $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) / \omega$.

4. INFERENCIA

La sección revisa la inferencia del modelo de regresión lineal normal-asimétrico vía parametrización directa con el método de máxima verosimilitud.

Sea $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^T, \omega, \alpha)^T \in \mathbb{R}^{k+2}$. El logaritmo natural de la verosimilitud del modelo de regresión lineal normal-asimétrico vía parametrización directa es

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \text{constante} - n \log \omega - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{1}_n,$$

donde $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$,

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = (\zeta_0(\alpha z_1), \zeta_0(\alpha z_2), \dots, \zeta_0(\alpha z_n))^T, \text{ y}$$

$$\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

En consecuencia: la primera derivada de $\ell(\boldsymbol{\theta})$ es

$$\mathcal{S} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_2 \\ \mathcal{S}_3 \end{bmatrix}$$

con

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{\omega} \mathbf{X}^T (\mathbf{z} - \alpha \boldsymbol{\lambda}_1)$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{\omega} (-n + \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \alpha \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{z})$$

$$\mathcal{S}_3 = \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{z},$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_1 = (\zeta_1(\alpha z_1), \zeta_1(\alpha z_2), \dots, \zeta_1(\alpha z_n))^T$; y la matriz de información es

$$\mathcal{J} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11} & \mathcal{J}_{12} & \mathcal{J}_{13} \\ \mathcal{J}_{21} & \mathcal{J}_{22} & \mathcal{J}_{23} \\ \mathcal{J}_{31} & \mathcal{J}_{32} & \mathcal{J}_{33} \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= -\frac{1}{\omega^2} \mathbf{X}^\top \{\mathbf{I}_n + \alpha^2 \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2)\} \mathbf{X} & J_{32} &= -\frac{1}{\omega} \{\boldsymbol{\lambda}_1^\top \mathbf{z} + \alpha \mathbf{z}^\top \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2) \mathbf{z}\} \\
 J_{21} &= -\frac{1}{\omega^2} \mathbf{X}^\top \{2\mathbf{z} - \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 - \alpha^2 \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2) \mathbf{z}\} & J_{33} &= \mathbf{z}^\top \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2) \mathbf{z}, \\
 J_{22} &= -\frac{1}{\omega^2} \{-n + 3\mathbf{z}^\top \mathbf{z} - 2\alpha \boldsymbol{\lambda}_1^\top \mathbf{z} - \alpha^2 \mathbf{z}^\top \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2) \mathbf{z}\} & J_{12} &= J_{21}^\top, \quad J_{13} = J_{31}^\top, \quad J_{23} = J_{32}^\top, \text{ donde} \\
 J_{31} &= -\frac{1}{\omega} \mathbf{X}^\top \{\boldsymbol{\lambda}_1 + \alpha \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2) \mathbf{z}\} & \boldsymbol{\lambda}_2 &= (\zeta_2(\alpha z_1), \zeta_2(\alpha z_2), \dots, \zeta_2(\alpha z_n))^\top \quad \text{y} \\
 & & \mathbf{D}(\boldsymbol{\lambda}_2) &= \text{diagonal}(\boldsymbol{\lambda}_2).
 \end{aligned}$$

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12(2), 171–178. <http://www.jstor.org/stable/4615982>.
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 61(3), 579–602. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00194>
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (2014). *The Skew-Normal and Related Families*. New York: Cambridge University Press.
- Ferreira, C., Vilca, F., and Bolfarine, H. (2018). Diagnostics analysis for skew-normal linear regression models: Applications to a quality of life dataset. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 32(3). <https://doi.org/10.1214/17-BJPS352>
- Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. New York: Springer, 2nd edition.
- Naseem, I., Togneri, R., and Bennamoun, M. (2010). Linear regression for face recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(11), 2106–2112. <https://ieeexplore.ieee.org/document/5506092>
- Rubio, F. J. and Genton, M. G. (2016). Bayesian linear regression with skew-symmetric error distributions with applications to survival analysis. *Statistics in Medicine*, 35(14), 2441–2454. <https://doi.org/10.1002/sim.6897>
- Sahu, S. K., Dey, D. K., and Branco, M. D. (2003). A new class of multivariate skew distributions with applications to bayesian regression models. *Canadian Journal of Statistics*, 31(2), 129–150. <https://doi.org/10.2307/3316064>

¿ES LA EDUCACIÓN O LA SITUACIÓN ECONÓMICA LA PRINCIPAL DETERMINANTE SOCIAL DE LA MORTALIDAD INFANTIL EN BOLIVIA?

IS EDUCATION OR ECONOMIC STATUS THE MAIN SOCIAL DETERMINANT OF INFANT MORTALITY IN BOLIVIA?

Ramiro Coa Clemente¹

Instituto de Estadística Teórica y Aplicada, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz-Bolivia

✉ rcoa@fcpn.edu.bo

Artículo recibido: 11-08-2022

Artículo aceptado: 27-09-2022

RESUMEN

El objetivo de este estudio es probar estadísticamente si la educación de las madres es una determinante social más importante que la situación económica de los hogares para reducir la mortalidad infantil. Con información de la encuesta nacional de demografía y salud realizada en 2008 y usando el modelo de riesgos proporcionales de Cox, se concluye que la educación materna es una determinante social más importante que la situación económica de los hogares para explicar las diferencias en el riesgo de mortalidad durante el primer año de vida. Como indicador de la situación económica de los hogares se usó el índice de riqueza. Estos resultados son coherentes con los obtenidos en otros estudios y respaldan la afirmación de que la educación es la clave para reducir la mortalidad infantil.

Palabras clave: Determinantes de mortalidad infantil, Educación, Modelo de Cox, Situación económica.

ABSTRACT

The objective of this study is to test statistically whether the education of mothers is a more important social determinant than the economic status of households in reducing infant mortality. With information from the national demographic and health survey conducted in 2008 and using the Cox proportional hazards model, it is concluded that maternal education is a more important social determinant than the economic status of households in explaining the differences in the risk of mortality during the first year of life. As an indicator of the economic status of households, the wealth index was used. These results are consistent with those obtained in other studies and support the claim that education is the key to reducing infant mortality.

Key words: Determinants of infant mortality, Education, Cox model, Economic status.

1. INTRODUCCIÓN

Según la Comisión sobre Determinantes Sociales de la Salud (2009), dependiente de la Organización Mundial de la Salud, la alta morbilidad que deriva en índices de mortalidad prematura terriblemente altos es producto, en gran parte, de las condiciones de vida en que las personas nacen, crecen, viven, trabajan y envejecen. La Comisión también establece que

la deficiencia y la disparidad en las condiciones de vida son consecuencia de factores estructurales más profundos que, en conjunto, determinan la organización social. Ambos, condiciones de vida y factores estructurales, constituyen el conjunto de los determinantes sociales de la salud. La Comisión recomienda poner en práctica medidas para modificar los determinantes sociales de la salud, lo que permitirá obtener enormes mejorías en lo que

¹ Director del Instituto de Estadística Teórica y Aplicada (IETA), Carrera de Estadística, Universidad Mayor de San Andrés. ORCID: 0000-0002-2955-0204

respecta a la equidad sanitaria, incluido la mortalidad en la infancia.

Dos componentes importantes de las denominadas condiciones de vida son el nivel de educación y la situación económica. Según Veneman (2006), la educación es la clave para reducir la mortalidad infantil. La educación contribuye a infundir conductas y hábitos que tienen un efecto positivo sobre la salud de las personas. Con el tiempo, los niños que acaban la enseñanza básica se convierten en padres de familia más capaces de ofrecer una atención de calidad a sus hijos y pueden aprovechar mejor los servicios sanitarios y sociales de los que disponen. Por otra parte, la situación económica de las familias también juega un rol fundamental en la salud de las personas en general, y particularmente en el nivel de mortalidad durante la infancia. Familias en mejor situación económica podrían, por ejemplo, acceder a más y a “mejores” servicios de salud y podrían disponer de viviendas con más y mejores servicios básicos que familias con limitaciones económicas, lo que puede traducirse en una menor mortalidad infantil. Entonces, de lo anterior surge la interrogante: ¿es la educación una determinante social más importante que la situación económica de las familias para reducir la mortalidad infantil en Bolivia durante el periodo 2003 a 2008? El objetivo del presente artículo es responder esta interrogante, la cual tiene importancia a la hora de formulación de políticas y programas.

Las encuestas de demografía y salud realizadas en el país no incluyen preguntas destinadas a medir la situación económica de las familias, sea a través de sus ingresos o a través de sus gastos. Empero, a partir de la información de tales encuestas, Rutstein y Kiersten (2004) obtuvieron un índice de

² En 2016 se realizó la última encuesta de demografía y salud en el país, empero, se detectó algunos problemas en los datos

riqueza, índice que es usado como indicador de la situación económica de los hogares. Para la construcción de tal índice se ha usado información sobre un conjunto de bienes y servicios que poseen las familias. A cada uno de los miembros de los hogares se le asignó el mismo valor del índice correspondiente a su hogar y, posteriormente, se obtuvieron los quintiles de riqueza. Con respecto al desempeño del índice, se concluye que el índice de riqueza explica igual o más que el índice de gasto, las diferencias entre hogares con relación a un conjunto de indicadores de salud. Este índice de riqueza es el que es usado en este artículo para el análisis y para dar respuesta a la pregunta plantada anteriormente.

2. MÉTODO

Información

Los datos para dar respuesta a la pregunta planteada en la sección introductoria provienen de la encuesta nacional de demografía y salud realizada en 2008². La sección de historia de nacimientos permite analizar el riesgo de muerte de los niños menores de un año. Se ha procesado el tiempo de vida durante el primer año de los niños nacidos vivos en los cinco años previos a la encuesta, es decir, el tiempo de vida durante los primeros 11 meses después de haber nacido, para los 9.112 nacimientos en los 5 años previos a la encuesta. Adicionalmente, para cada nacimiento se tiene identificado su condición de sobrevivencia, es decir, si murió o estuvo vivo en el primer año de vida. Una muerte representa la ocurrencia del evento, en cambio si el niño no ha muerto representa una censura por la derecha.

Por otra parte, se han considerado cuatro

referidos a la historia de nacimientos, razón por la que esta fuente de información no se la considera en el análisis.

¿Es la educación o la situación económica la principal determinante social de la mortalidad infantil en Bolivia?

variables explicativas, el nivel de educación de las madres, el nivel de riqueza de los hogares en los que residen los niños, el sexo del niño y el área de residencia. En la siguiente tabla se especifican las categorías que comprenden estas variables:

Variable	Categorías
Nivel de educación de la madre	Sin educación Primaria Secundaria Superior
Nivel de riqueza del hogar	Quintil más pobre Quintil pobre Quintil medio Quintil rico Quintil más rico
Sexo del niño	Hombre Mujer
Área de residencia	Urbana Rural

El modelo

Entre los métodos semiparamétricos para el análisis de datos de sobrevivencia se encuentra principalmente el modelo de regresión de riesgos proporcionales de Cox. Este modelo, de enorme popularidad, fue propuesto por Cox (1972). Dos de las razones de su popularidad son: (i) que el modelo no requiere que se elija una distribución de probabilidad particular para representar los tiempos de sobrevivencia, motivo por el que se le ha denominado método semiparamétrico, y que (ii) Cox propuso un nuevo método de estimación de los coeficientes del modelo, denominado verosimilitud parcial, el cual no requiere especificar la función de riesgo de línea de base. Este modelo, que a continuación se presenta, es usado para dar respuesta a la pregunta planteada en la anterior sección.

Sea T una variable de tiempo de falla absolutamente continua y t un valor de tal variable. En el esquema de riesgos proporcionales de Cox se modela el riesgo de muerte en el momento t , denotado por $\lambda(t)$, en función de un riesgo de línea de base $\lambda_0(t)$, que no es necesario especificar, y de un vector de covariables $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)'$ que podrían o no depender del tiempo t .

La función de riesgo de muerte es definida como

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t+h \mid T \geq t)}{h},$$

función que expresa la tasa instantánea a la que ocurren las fallas o muertes para las personas que están vivas en el momento t . Luego, el modelo de riesgos proporcionales de Cox, para la persona j , es expresado como

$$\lambda(t/X_j) = \lambda_0(t)e^{X_j(t_j)\beta},$$

donde β representa el vector de coeficientes de la regresión y $X_j(t_j)$ es el vector de covariables para la persona j en el momento t_j . En este modelo, las covariables actúan multiplicativamente sobre la función de riesgo. Si las covariables son independientes del tiempo, entonces el modelo se reduce a $\lambda(t/X_j) = \lambda_0(t) e^{X_j\beta}$.

Lo atractivo del modelo de regresión de riesgos proporcionales de Cox es que no asigna ninguna parametrización particular al riesgo de línea de base $\lambda_0(t)$, e incluso no es necesario estimarlo. El modelo no hace ningún supuesto acerca de la forma del riesgo en el tiempo, solo se asume que, cualquiera que sea su forma general, es el mismo para cada persona.

³ Para la construcción de los quintiles de riqueza se usa información sobre los bienes de consumo duradero del hogar (disponibilidad de radio, televisor, teléfono celular, refrigerador, computadora y vehículo, entre otros, además de

características de la vivienda). Luego, mediante el método de componentes principales se construye un índice de riqueza. A los residentes de un mismo hogar se asigna el índice del hogar. Esto permite crear quintiles poblacionales de riqueza.

Estimación

Para estimar el vector de coeficientes β sólo se consideran los rangos de los tiempos de falla, no sus valores numéricos. Asumiendo que los datos de tiempos de falla son censurados a la derecha, la verosimilitud parcial es expresada como

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^k \frac{e^{X_j(t_j)\beta}}{\sum_{i \in R(t_j)} e^{X_i(t_j)\beta}}$$

donde $R(t_j)$ representa el conjunto de personas en riesgo de muerte en el momento en que muere la persona j y k es el número de tiempos de falla o muerte no-censuradas, esto es, $t_1 < \dots < t_k$, ignorando por el momento el caso de empates. Los restantes $n - k$ individuos son censurados a la derecha, donde n es el tamaño de muestra.

Debe notarse que la verosimilitud parcial no es directamente interpretable como una verosimilitud en el sentido ordinario de la palabra. En efecto, en general a la función de verosimilitud parcial no puede darse ninguna interpretación de probabilidad directa como tampoco la probabilidad condicional o marginal de algún evento. En muchas situaciones, sin embargo, puede ser usado como una verosimilitud ordinaria para propósitos de estimación en muestras grandes en el que las propiedades y fórmulas asintóticas usuales asociadas con la función de verosimilitud y la estimación de verosimilitud se aplican.

El vector de estimadores de máxima verosimilitud, $\hat{\beta}$, es la solución del sistema de ecuaciones no-lineales

$$U(\beta) = \frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \sum_{j=1}^k [X_j(t_j) - E(\beta, t_j)] = 0$$

donde

$$E(\beta, t_j) = \sum_{i \in R(t_j)} X_i(t_j) p_i(\beta, t_j)$$

representa el promedio ponderado de las covariables $X_i(t_j)$ y los ponderadores $p_i(\beta, t_j)$ se obtienen como

$$p_i(\beta, t_j) = \frac{e^{X_i(t_j)\beta}}{\sum_{i \in R(t_j)} e^{X_i(t_j)\beta}}$$

los cuales satisfacen las siguientes dos restricciones

$$0 \leq p_i(\beta, t_j) \leq 1, \quad \sum_i p_i(\beta, t_j) = 1.$$

En ausencia de empates, la distribución asintótica del vector de estimadores $\hat{\beta}$ es

$$\hat{\beta} \xrightarrow{d} N(\beta, I(\hat{\beta})^{-1})$$

donde

$$I(\beta) = -\frac{d^2 \ln L(\beta)}{d\beta d\beta'} = \sum_{j=1}^k Y(\beta, t_j)$$

es la matriz de información observada y $Y(\beta, t_j)$ es la matriz de varianzas-covarianzas de $X_i(t_j)$ bajo la distribución $p_i(\beta, t_j)$, expresada como

$$Y(\beta, t_j) = \sum_{i \in R(t_j)} [X_i(t_j) - E(\beta, t_j)] [X_i(t_j) - E(\beta, t_j)]' p_i(\beta, t_j)$$

Cuando hay personas que mueren en el mismo momento, es decir cuando hay empates, hay cuatro procedimientos para ajustar la verosimilitud parcial: (i) procedimiento marginal, (ii) parcial, (iii) de Breslow, una aproximación del procedimiento marginal, y (iv) de Efron, una aproximación del procedimiento marginal. Los dos primeros procedimientos son computacionalmente más intensivos, mientras que la aproximación de Efron es más precisa que la de Breslow, si bien toma más tiempo el cálculo de la

¿Es la educación o la situación económica la principal determinante social de la mortalidad infantil en Bolivia?

verosimilitud. En la aplicación se consideró la aproximación de Breslow.

Supuesto

El modelo de riesgos proporcionales de Cox asume que la razón de riesgos de dos personas j y m son proporcionales, esto es, la razón

$$\frac{\lambda(t/X_j)}{\lambda(t/X_m)} = \frac{e^{X_j\beta}}{e^{X_m\beta}}$$

es constante en el tiempo. Existen procedimientos gráficos, así como test formales para evaluar este supuesto. En la aplicación se recurre a ambos tipos de procedimientos, gráficos y formales.

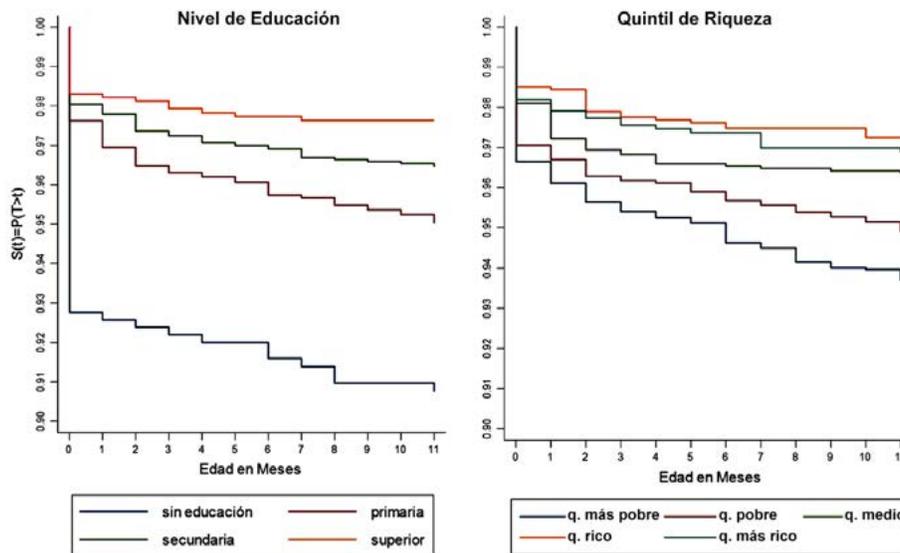
3. APLICACIÓN

3.1 Análisis descriptivo

El Gráfico 1 exhibe la función de sobrevivencia de Kaplan-Meier – o probabilidad de vivir más de una edad t – estimada para cada nivel de educación de las madres y para cada quintil de riqueza de los hogares en los que residen los niños. Resaltan dos aspectos. Primero, las funciones de sobrevivencia se diferencian o varían mucho más cuando se considera el nivel de educación que cuando se considera el quintil de riqueza y; segundo, las probabilidades de sobrevivencia de niños cuyas madres no tienen educación formal son mucho más bajas que las probabilidades de sobrevivencia en las otras categorías de educación.

Gráfico 1

Función de Sobrevivencia Según Educación y Riqueza



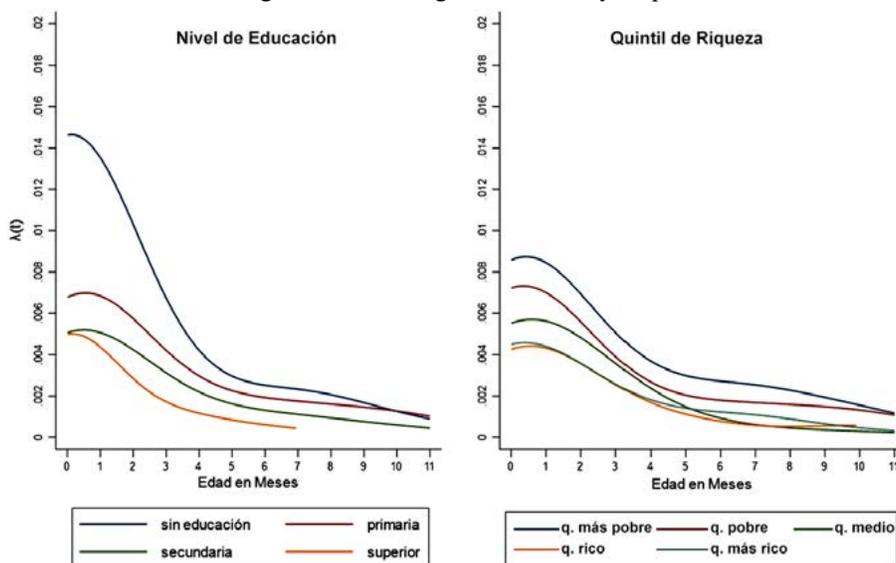
Fuente: Elaboración propia.

Los anteriores aspectos también son reflejados en el Gráfico 2, el cual muestra la evolución de la función de riesgo de muerte durante el primer año de vida para las mismas categorías de educación y riqueza. Notar que son tasas de riesgo suavizadas. Se observa, por una parte, mayor diferencia entre los riesgos de muerte para las distintas categorías de educación que entre los riesgos de muerte para las categorías

de riqueza y, por otra parte, mucho más riesgo de muerte para niños de madres sin educación. Adicionalmente, el Gráfico 2 muestra que el riesgo de muerte de los niños tiene una tendencia descendente a lo largo del primer año de vida, empero, el mayor descenso se registra en los primeros 3 a 4 meses de vida. A partir de estas edades el descenso es mucho más leve.

Gráfico 2

Riesgo de Muerte Según Educación y Riqueza



Fuente: Elaboración propia.

Se hizo una prueba de hipótesis para constatar si las funciones de supervivencia en las categorías de educación son estadísticamente diferentes. Esto es, $H_0: S_j(t) = S_{j'}(t)$ para $j, j' = 1, \dots, K$ grupos v.s. $H_1: S_j(t) \neq S_{j'}(t)$. Lo mismo para las categorías de quintil de riqueza. Los resultados se muestran en el Cuadro 1.

Cuadro 1.

Valores-p para las hipótesis de igualdad de funciones de supervivencia

Nivel de Educación				
	Primaria	Secundaria	Superior	
Sin educación	0,000	0,000	0,000	
Primaria		0,000	0,000	
Secundaria			0,072	
Test de tendencia	0,000			
Nivel de Riqueza				
	Q. pobre	Q. medio	Q. rico	Q. más rico
Q. más pobre	0,091	0,00	0,00	0,00
Q. pobre		0,041	0,001	0,011
Q. medio			0,131	0,412
Q. rico				0,578
Test de tendencia:	0,000			

Fuente: Elaboración propia

Los resultados del Cuadro 1 muestran que, para nivel de educación, solo las funciones

de supervivencia para niños cuyas madres tienen educación secundaria y superior son estadísticamente iguales, el resto de las categorías tienen funciones distintas. Luego, se tienen 3 grupos de funciones de supervivencia en el primer año de vida, estadísticamente diferentes: (1) sin educación, (2) primaria y (3) secundaria-superior. En cambio, para el nivel de riqueza se tienen 2 grupos de funciones de supervivencia estadísticamente diferentes: (1) quintiles medio-rico-más rico, por poseer funciones de supervivencia iguales y (2) quintiles más pobre-pobre, también por poseer funciones de supervivencia iguales. En consecuencia, las funciones de supervivencia se diferencian o varían mucho más cuando se considera el nivel de educación que cuando se considera el quintil de riqueza, lo que sugiere mayor poder explicativo de la educación que la situación económica sobre el riesgo de muerte en el primer año de vida. Adicionalmente, se tiene evidencia estadística de una tendencia descendente del riesgo de muerte durante el primer año de vida en cada categoría de nivel de educación y de nivel de riqueza.

¿Es la educación o la situación económica la principal determinante social de la mortalidad infantil en Bolivia?

3.2 Análisis explicativo

El modelo de Cox estimado se muestra en el Cuadro 2. Los resultados indican que los niños de madres sin educación o con educación primaria tienen significativamente mayor riesgo de morir en el primer año de vida que los niños de madres con educación superior, controlando el efecto de las demás variables. En cambio, no se observan diferencias de riesgo de muerte en la infancia entre los distintos quintiles de riqueza. En efecto, los riesgos de muerte de los niños pertenecientes a los distintos quintiles de riqueza son estadísticamente iguales, controlando el efecto de las demás variables. Esto es, el efecto de la riqueza sobre el riesgo de muerte en la infancia desaparece, mientras el efecto del nivel de educación permanece. En consecuencia, se evidencia estadísticamente que la educación es una determinante social más importante

que la situación económica de las familias para reducir la mortalidad infantil.

Cuadro 2
Modelo estimado de Cox

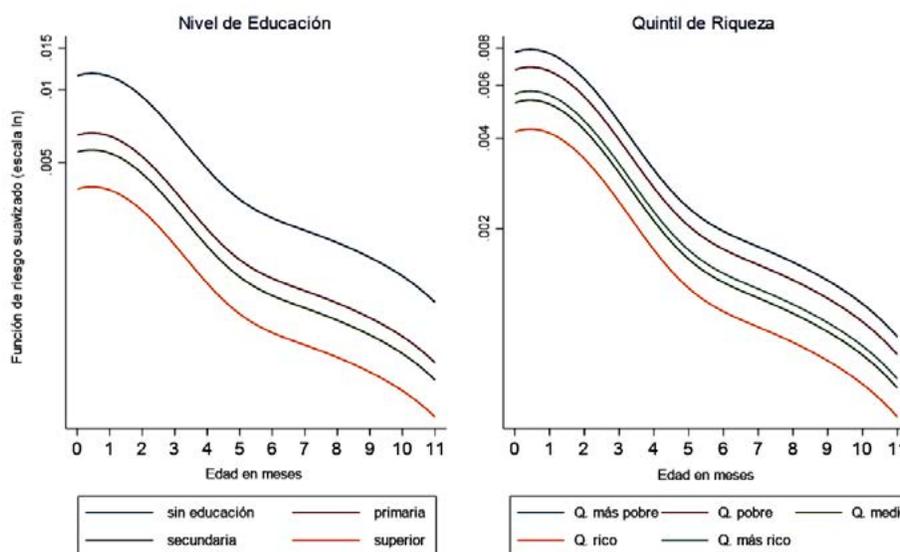
t	Razón de riesgos	Val-p	Intervalo de confianza 95%	
NIVEL DE EDUCACIÓN				
Sin educación	3,01	0,000	1,74	5,20
Primaria	1,68	0,032	1,05	2,70
Secundaria	1,43	0,134	0,90	2,27
QUINTIL DE RIQUEZA				
Q. más pobre	1,42	0,205	0,83	2,43
Q. pobre	1,23	0,416	0,75	2,02
Q. medio	0,94	0,792	0,60	1,48
Q. rico	0,75	0,228	0,47	1,20
SEXO				
Hombre	1,26	0,021	1,04	1,54
RESIDENCIA				
Urbana	1,03	0,871	0,74	1,42

Fuente: Elaboración propia

Con relación al cumplimiento del supuesto de riesgos proporcionales, el Gráfico 3 exhibe la evolución de los riesgos de muerte durante el primer año de vida.

Gráfico 3

Test de Supuesto de Riesgos Proporcionales de Cox



Fuente: Elaboración propia.

Claramente se puede apreciar en el Gráfico 3 que las funciones de riesgo de muerte suavizadas para las categorías de nivel de educación y quintil de riqueza son proporcionales a lo largo del primer año de

vida, lo que sugiere el cumplimiento del supuesto.

Dos tests formales permitieron evidenciar el cumplimiento de tal supuesto. Por una parte,

cada una de las covariables consideradas en el modelo se interactuó con el tiempo y se comprobó que los efectos de estas variables interactuadas no son estadísticamente distintos de cero (valor-p = 0.2012), un resultado coherente con el supuesto de riesgos proporcionales puesto que este supuesto establece que los efectos no cambian con el tiempo. Por otra parte, el test basado en los residuos de Schoenfeld también confirma el supuesto de riesgos proporcionales (valor-p = 0.1585).

Adicionalmente se realizó un test para probar la correcta especificación del modelo. El test consiste en verificar que el coeficiente asociado al cuadrado del predictor lineal no es significativo. En efecto, se comprobó que tal coeficiente es insignificante (valor-p = 0.746), lo que sugiere una correcta especificación del modelo.

4. CONCLUSIÓN

La pregunta central que intentó responder este trabajo es: si la educación es una determinante social más importante que la situación económica de las familias para reducir la mortalidad infantil. Con base en un análisis descriptivo de los datos se pudo evidenciar que tanto las funciones de sobrevivencia como las funciones de riesgo de muerte en el primer año de vida se diferencian o varían mucho más cuando se considera el nivel de educación que cuando se considera el quintil de riqueza. Posteriormente, a partir de los resultados obtenidos con el modelo de regresión de riesgos proporcionales de Cox, se pudo comprobar estadísticamente que la educación es una determinante social más importante que la situación económica para reducir la mortalidad infantil.

5. DISCUSIÓN

Varios estudios se desarrollaron con el

propósito de identificar los principales determinantes de la mortalidad infantil. Algunos de esos estudios usan, entre otros, información referida a la educación de la madre, pero no incluyen la situación económica de los hogares. Por ejemplo, los estudios de Jaramillo et al (2018), Kaempffer y Medina (2006), y Diaz (2003). En éstos, se resalta la significación de la educación materna para la reducción de la mortalidad infantil, aunque en el documento de Diaz se remarca que no es la determinante más importante. Con todo, no es posible comparar los efectos de educación y situación económica sobre la mortalidad en la infancia. Existen otros estudios que, entre otras variables explicativas, incluyen la dimensión económica pero no la educación materna, por ejemplo, el estudio de Zurriaga et al (1990). En este trabajo se concluye que la renta familiar disponible y la renta per cápita juegan un papel importante en explicar la variación de la mortalidad infantil. Empero, como en los casos anteriores, tampoco es posible comparar los efectos de los factores económicos y educacionales sobre la mortalidad en la infancia.

Hay otros estudios que incluyen en su análisis de determinantes de la mortalidad infantil, entre otras variables, la educación materna y un indicador de la situación económica. Por ejemplo, el trabajo de Urdinola (2011), en el que se consideran variables relacionadas al poder adquisitivo de los hogares (como los materiales de la vivienda, la amplitud de la misma, el hacinamiento, el acceso a los servicios públicos básicos y el acceso a servicio sanitario). En este trabajo se concluye que, dentro de los determinantes socioeconómicos de la tasa de mortalidad infantil, la educación materna es la principal determinante. En el trabajo de Dammert (2001) también se incluye en su análisis de determinantes la educación materna

¿Es la educación o la situación económica la principal determinante social de la mortalidad infantil en Bolivia?

y el índice de riqueza, este último como indicador de la situación económica. Se concluye que entre las variables que afectan significativamente la mortalidad infantil se encuentra la educación de la madre. De acuerdo a los resultados de Dammert, la educación de la madre es una determinante más importante que la situación económica. Para el caso boliviano se tiene el estudio de Córdova y Nicolaeva (2015). En su análisis también se consideran, como parte del conjunto de variables examinadas, la educación de la madre y el índice de riqueza. Se concluye, sin embargo, que el tipo de análisis implementado no es concluyente. En efecto, el método de análisis empleado en el trabajo de referencia, el de asociación

bivariada, no es el apropiado para extraer conclusiones relativamente sólidas.

Como se puede ver, con base en los estudios sobre determinantes de la mortalidad infantil que incluyen en su análisis, entre otros, la educación materna y un indicador de la situación económica, como el índice de riqueza, se tiene alguna evidencia estadística de que la educación de la madre es una determinante social más importante que la situación económica para reducir la mortalidad infantil. Los resultados obtenidos en el presente trabajo respaldan esos hallazgos y, a la vez, confirman la afirmación de Veneman (2006), de que la educación es la clave para reducir la mortalidad infantil.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Bradburn M.J., Clark T.G., Love S.B and Altman, D.G. (2003). *Survival Analysis Part II: Multivariate Data Analysis – An Introduction to Concepts and Methods*. British Journal of Cancer 89: 431 – 436.
- Collett, D. (1994). *Modelling Survival Data in Medical Research*. Chapman Hall, London, U.K.
- Comisión Sobre Determinantes Sociales de la Salud. (2009). Subsanan las desigualdades en una generación. Alcanzar la equidad sanitaria actuando sobre los determinantes sociales de la salud. *Informe final de la Comisión Sobre Determinantes Sociales de la Salud*. Organización Mundial de la Salud. <https://apps.who.int/iris/handle/10665/44084>
- Córdova P. y Nicolaeva M. (2015). *Una aproximación a los determinantes socioeconómicos de la mortalidad infantil y de niñez en Bolivia: uso de métodos indirectos de cálculo de mortalidad y análisis bivariado*. Investigación y Desarrollo, Vol. 2, No 5.
- Cox, D.R. (1972). *Regression Models and Life-Tables*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B 34: 187-220.
- Cox, D.R. and Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*. Chapman Hall, London, U.K.
- Dammert A. (2001). *Acceso a servicios de salud y mortalidad en el Perú. Consorcio de investigación económica y social y grupo de análisis para el desarrollo*. Investigaciones breves, 18.
- Díaz Y. (2003). *¿Es necesario sacrificar equidad para alcanzar desarrollo?: El caso de las inequidades en mortalidad infantil en Colombia*. Documento CEDE 003804. Universidad de los Andes, Facultad de Economía. <https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/>

- [handle/1992/8347/dcede2003-11.pdf](#)
- Elandt-johnson, R.C. and Johnson, N.L. (1980). *Survival Models and Data Analysis*. Wiley, New York
- Jaramillo-Mejia M., Chernichovsky D. y Jménez-Moleón J. (2018). *Determinantes de la mortalidad infantil en Colombia*. Path Análisis. Revista de salud pública 20(1). <https://doi.org/10.15446/rsap.V20n1.39247>
- Kaempffer A. y Medina E. (2006). *Mortalidad infantil reciente en Chile: Éxitos y desafíos*. Revista chilena de pediatría, Vol. 77, No 5. <https://dx.doi.org/10.4067/S0370-41062006000500007>
- Kleinbaum, D.G., Klein, M. (2012). *Survival Analysis*. Springer, 3ra Ed.
- Oxford Spring School. (2007). *An Introduction to Event History Analysis*. https://spia.uga.edu/faculty_pages/rbakker/pols8501/OxfordTwoNotes.pdf
- Rutstein S. and Kiersten J. (2004). *The DHS wealth index*. DHS comparative reports No. 6. ORC macro
- SAS/STAT 9.3. (2011). *User's Guide Introduction to Survival Analysis Procedures*. SAS Institute Inc.
- SAS/STAT 13.1. (2013). *User's Guide The Lifetest Procedure*. SAS Institute Inc.
- SAS/STAT 13.2. (2014). *User's Guide The Phreg Procedure*. SAS Institute Inc.
- Stata. (2019). *Statistical Software*. College Station, TX: StataCorp LLC.
- Stevenson M. (2007). *An Introduction to Survival Analysis*. EpiCentre, IVABS, Massey University. http://www.biecek.pl/statystykaMedyczna/Stevenson_survival_analysis_195.721.pdf
- Urdinola P. (2011). *Determinantes socioeconómicos de la mortalidad infantil en Colombia*. Revista Colombiana de Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Vol. 34, No 1
- Veneman A. (2006). *La educación es la clave para reducir la mortalidad infantil: el vínculo entre la salud materna y la educación*. <https://www.un.org/es/chronicle/article/la-educacion-es-la-clave-para-reducir-la-mortalidad-infantil-el-vinculo-entre-la-salud-materna-y-la>
- Zurriaga O., Sánchez A., Sanchis B., Prado M. y Cortiña P. (1990). *Algunos factores determinantes de la mortalidad infantil en España*. Salud pública de México, Vol. 32, No 6.

EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE: UNA VISIÓN ILUSTRATIVA

THE CENTRAL LIMIT THEOREM: AN ILLUSTRATIVE VIEW

Raúl León Delgado Álvarez ¹

Carrera de Estadística, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz-Bolivia

✉ rldelgado3@umsa.bo

Artículo recibido: 17-08-2022

Artículo aceptado: 06-09-2022

RESUMEN

El Teorema Central del Límite es de gran importancia, en el estudio de la Estadística, para su comprensión además de la variedad de problemas prácticos, está la certeza de su convergencia.

Objetivo: Comprender el Teorema Central del Límite, y su convergencia.

Método: Se utilizarán cuadros y gráficos de la distribución del promedio de variables aleatorias independientes cada una con distribución Uniforme en el intervalo (0,1) y comparándola con la distribución Normal standard.

Datos: Para este fin se utilizará una partición del intervalo comprendido entre 0 y 1, en distancias de un décimo.

Resultados: Se mostrará la rápida convergencia del promedio de las variables citadas con distribución Uniforme hacia una distribución Normal estándar; para esta comparación se consideran dos cuadros que mostrarán esta afinidad de forma numérica y posteriormente (para cuando n aumente su valor) se expondrá el gráfico de la distribución del promedio de variables que completará el panorama.

Palabras clave: Convergencia, distribución Irwin Hall, ilustración, Teorema Central del Límite.

ABSTRACT

The Central Limit Theorem is of great importance, in the study of Statistics, for its understanding, in addition to the variety of practical problems, there is the certainty of its convergence.

Objective: To understand the Central Limit Theorem, and its convergence.

Method: Tables and graphs of the distribution of the average of independent random variables will be used, each with a Uniform distribution in the interval (0.1) and comparing it with the standard Normal distribution.

Data: For this purpose, a partition of the interval between 0 and 1, in distances of one tenth, will be used.

Results: The rapid convergence of the average of the variables mentioned with Uniform distribution towards a standard Normal distribution will be shown; For this comparison, two tables are considered that will show this affinity numerically and later (for when n increases its value) the graph of the distribution of the average of variables will be exposed that will complete the panorama.

Key words: Convergence, Irwin Hall distribution, illustration, Central Limit Theorem.

¹ Docente emérito, Carrera de Estadística Universidad Mayor de San Andrés, La Paz Bolivia
Orcid: 0000-0001-7886-5264

I. INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza aprendizaje de la Estadística, amerita reflexionar sobre, cuan útiles son las segmentaciones de esta disciplina, traducidas en asignaturas que marcan contenidos secuenciales y cuáles son las mejores estrategias que deberían utilizar los docentes para conseguir un aprendizaje significativo en el colectivo estudiantil.

Una parte sin duda importante, es la comprensión del enunciado teórico de un tema, que se realiza a la luz del método científico, utilizando axiomas, lemas, teoremas, y corolarios cuyas demostraciones se desarrollan en clase.

Otra parte es el argumento ilustrativo en la enseñanza para fijar los conocimientos, cómo son los cuadros y gráficos que sin duda son elementos que ayudan a este cometido.

El Teorema Central del límite, se desarrolla haciendo énfasis en una de sus principales características como es su convergencia, la que muestra a través del comportamiento de la distribución del promedio aritmético de variables aleatorias. El teorema es muy fuerte en sus aplicaciones dado que ni siquiera es necesario conocer la distribución de las variables. La distribución Uniforme es un ejemplo ideal de una distribución simple y se puede considerar genérica pues, cada una de las variables aleatorias con distribución de densidad de probabilidades se encuentra en el intervalo (0,1) a diferencia de la distribución Beta que cuya gráfica ya muestra una comparación con la Normal.

2. PROBLEMA

En estudios realizados por (Johnson, Kotz, & Balakrishnan, 1995, pág. 296), en el libro *Continuous Univariate Distributions*, los autores citan a la distribución de Irwin Hall,

para explicar la suma de variables aleatorias independientes, cada una con distribución Uniforme en el intervalo (0,1), que se constituye en un aporte para la comprensión del Teorema Central del Límite. Otro aspecto didáctico, se puede observar en el texto denominado Estadística Informatizada, (Barrera Ojeda, 2019), que hace referencia al aprendizaje utilizando programas informáticos.

3. OBJETIVO

Comprender el Teorema Central del Límite, y su convergencia, a través de cuadros y gráficos de la distribución del promedio de variables aleatorias independientes cada una con distribución Uniforme en el intervalo (0,1) y comparándola con la distribución Normal standard.

4. DESARROLLO

A diferencia del concepto de convergencia en sucesiones de números reales, en las sucesiones de variables aleatorias se debe considerar que las imágenes son números reales, pero siendo las variables aleatorias funciones de un espacio muestral hacia un conjunto numérico, la diferencia de una variable genérica X_n de la sucesión menos una variable aleatoria X , tanto por exceso como por defecto que sea menor que un ϵ , es un suceso que tendría cierta probabilidad de no ocurrir (Obregón Sanin, 1977, pág. 247).

Se denomina convergencia en probabilidad si:

$$\text{Dado un } \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \quad (1)$$

Se denomina convergencia casi segura si:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1 \quad (2)$$

La convergencia casi segura, implica

convergencia en probabilidad, pero el recíproco no es cierto. Es decir la convergencia casi segura es más fuerte que la convergencia en probabilidad. La Ley de los grandes números afirma que si X es una variable aleatoria cuya media existe, y si X_1, X_2, \dots, X_n son observaciones independientes de ella, entonces $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge casi seguro a $E(X)$, esta versión se conoce como la Ley fuerte de los grandes números, si la convergencia es en probabilidad se denomina Ley débil de los grandes números.

El Teorema Central del Límite

El Teorema Central del Límite se enunciará en su forma general sin la demostración, dado que se pretende buscar su comprensión.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n , variables aleatorias no necesariamente independientes en el supuesto que las varianzas de las X_i sean finitas y que un número finito de ellas no predomine sobre las demás.

Definida por

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{D(\sum_{i=1}^n X_i)} \quad (3)$$

Donde $E(\cdot)$, es el valor esperado y $D(\cdot)$, la desviación estándar de la suma de variables aleatorias.

Y_n converge en probabilidad a una variable aleatoria con distribución Normal estándar.

Expresiones más restringidas son aquellas en que la independencia de las variables aleatorias, y su distribución común con media μ y varianza σ^2 nos permiten establecer que la sucesión:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (4)$$

Y la más conocida, de aplicaciones más

variadas es:

$$Y_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (5)$$

Se interpreta que Y_n converge en probabilidad a una variable Normal estándar, esta última afirmación podría interpretarse como sigue:

Si $F_n(z)$, es la función de distribución acumulada del término genérico de la sucesión de variables y $\Phi(z)$ es la función de distribución acumulada de la densidad Normal estándar, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(z)}{\Phi(z)} = 1 \quad (6)$$

O equivalentemente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) &= \Phi(z) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) - \Phi(z) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Es decir, que cuando n crezca más, las funciones acumuladas tenderán a ser iguales, este hecho puede observarse en el comportamiento del promedio de distribuciones uniformes, pero ya desde el promedio de dos variables, se observa esta convergencia y más aún con el promedio de tres o más variables.

La manera de la aproximación para una n finita, depende de las características de las distribuciones originales, pero en general es sorprendente la aproximación para una n pequeña en esta distribución.

Para mostrar este hecho, hacemos el análisis del promedio aritmético o media aritmética de variables aleatorias independientes con distribución común Uniforme en el intervalo $(0,1)$.

Si se consideran dos variables aleatorias X_1, X_2 con distribución Uniforme en el intervalo

(0,1) e independientes, a través del método de transformación u otro método, se puede probar que su promedio $z = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ sigue

la densidad $f(z)$ y su acumulada es $F_2(z)$

$$f(z) = \begin{cases} 4z, & 0 \leq z < \frac{1}{2} \\ 4(1-z), & \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Con

$$F_2(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 2z^2, & 0 \leq z < \frac{1}{2} \\ 4z - 1 - 2z^2, & \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

Los valores $E(z) = \frac{1}{2}$ y $V(z) = \frac{1}{24}$, se utilizarán en la estandarización de z .

Se recordará que $F_2(z)$ es la función de distribución acumulada exacta del promedio de dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo (0,1).

Cuadro No. 1

Comparación entre distribuciones acumuladas (n=2)

z	$F_2(z)$	$\Phi(z,0,5;0,2041)$	Error
0,0000	0,0000	0,0071	-0,0071
0,1000	0,0200	0,0250	-0,0050
0,2000	0,0800	0,0708	0,0092
0,3000	0,1800	0,1635	0,0165
0,4000	0,3200	0,3121	0,0079
0,5000	0,5000	0,5000	0,0000
0,6000	0,6800	0,6879	-0,0079
0,7000	0,8200	0,8365	-0,0165
0,8000	0,9200	0,9292	-0,0092
0,9000	0,9800	0,9750	0,0050
1,0000	1,0000	0,9929	0,0071

Fuente: Elaboración propia

Claramente el mayor error entre las distribuciones exacta y normal acumuladas, apenas excede el orden de los centésimos, este error es ínfimo sí se considerarán tres variables con distribución Uniforme en el intervalo (0,1) y siendo independientes, entre sí se puede hallar de forma equivalente

la función de densidad del promedio y su distribución acumulada como:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{27z^2}{2}, & 0 \leq z < \frac{1}{3} \\ -27z^2 + 27z - \frac{9}{2}, & \frac{1}{3} \leq z < \frac{2}{3} \\ \frac{27}{2}z^2 + \frac{27}{2} - 27z, & \frac{2}{3} \leq z < 1 \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

$$F_3(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{9}{2}z^2, & 0 \leq z < \frac{1}{3} \\ -9z^3 + \frac{27}{2}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq z < \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{9}{2}(1-z)^3, & \frac{2}{3} \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Considerando los valores de $E(z) = \frac{1}{2}$, $V(z) = \frac{1}{36}$, $D(Z) = \frac{1}{6}$, se realiza:

Cuadro No. 2

Comparación entre distribuciones acumuladas (n=3)

z	$F_3(z)$	$\Phi(z,0,5;0,1667)$	Error
0,0000	0,0000	0,0013	-0,0013
0,1000	0,0045	0,0082	-0,0037
0,2000	0,0360	0,0359	0,0001
0,3000	0,1215	0,1151	0,0064
0,4000	0,2840	0,2742	0,0098
0,5000	0,5000	0,5000	0,0000
0,6000	0,7160	0,7258	-0,0098
0,7000	0,8785	0,8849	-0,0064
0,8000	0,9640	0,9641	-0,0001
0,9000	0,9955	0,9918	0,0037
1,0000	1,0000	0,9987	0,0013

Fuente: Elaboración propia

Del Cuadro No. 2 se obtiene que el máximo error cometido al tomar la función de distribución de Z_3 como normal, es menor que 0,01, es decir, un error del 1%.

El cálculo numérico del error de estimación máximo no es el objetivo de este artículo, pero es un trabajo que puede lograr para el lector que quiere profundizar en este tema.

Lo observado anteriormente, conduce a la afirmación de que cuanto más tiende a crecer

El Teorema Central del Límite: Una visión ilustrativa

n , la aproximación a la distribución Normal de la distribución del promedio de variables aleatorias independientes con distribución Uniforme en el intervalo (0,1) es más visible, por la interpretación de los Cuadros No. 1 y 2, sin embargo, para interpretar que n crece grandemente, se hará uso de la distribución de Irwin Hall para el promedio de variables independientes con distribución Uniforme, entonces la distribución del promedio indicada, se obtiene como:

Siendo: $z = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, su función

de densidad de probabilidad es:

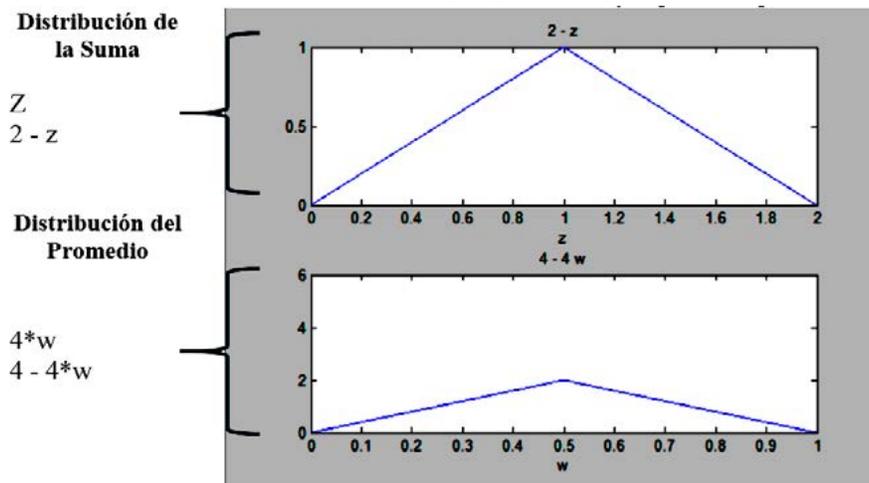
$$f(z) = \frac{n}{(n-1)!} \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} (-1)^j (nz - j)^{n-1} \quad (10)$$

Donde $\frac{k}{n} \leq z < \frac{k+1}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

En el entendido de proseguir con la visión ilustrativa, se ha desarrollado un programa en MATLAB que muestra la expresión de la distribución exacta y la gráfica de la misma, para su comparación..

Gráfico No. 1

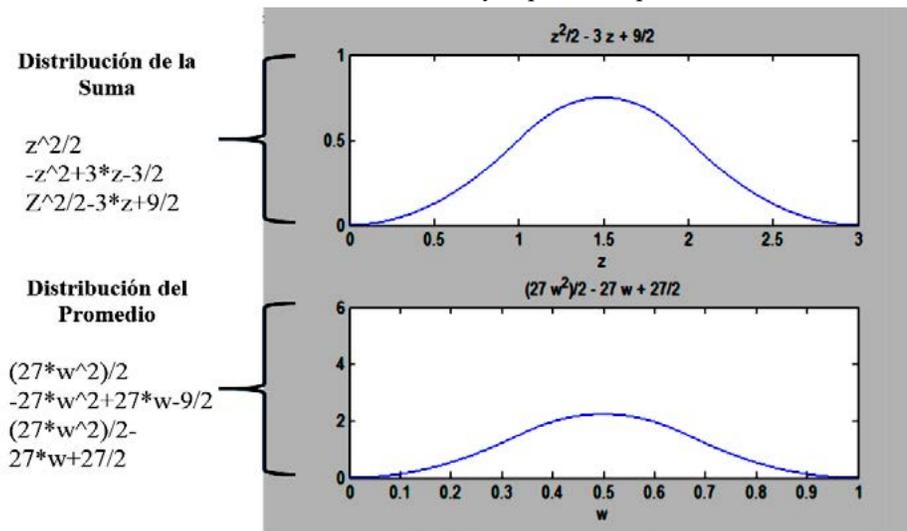
Distribución de la suma y el promedio para N=2



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico No. 2

Distribución de la suma y el promedio para N=3



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico No. 3

Distribución de la suma y el promedio para N=5

Distribución de la Suma

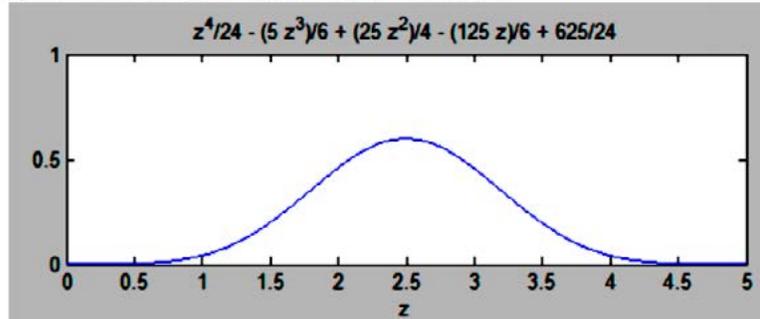
$$z^4/24$$

$$- z^4/6 + (5*z^3)/6 - (5*z^2)/4 + (5*z)/6 - 5/24$$

$$z^4/4 - (5*z^3)/2 + (35*z^2)/4 - (25*z)/2 + 155/24$$

$$- z^4/6 + (5*z^3)/2 - (55*z^2)/4 + (65*z)/2 - 655/24$$

$$z^4/24 - (5*z^3)/6 + (25*z^2)/4 - (125*z)/6 + 625/24$$



Distribución del Promedio

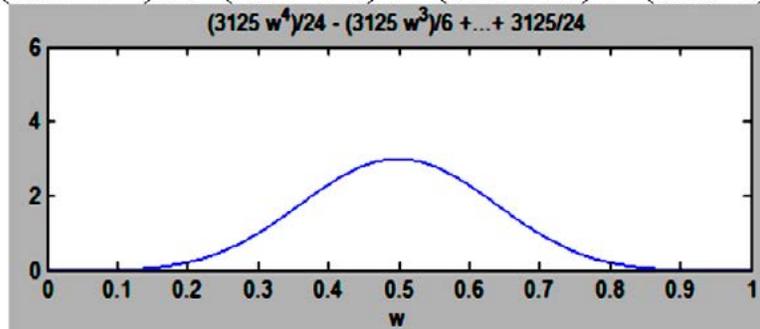
$$(3125*w^4)/24$$

$$- (3125*w^4)/6 + (3125*w^3)/6 - (625*w^2)/4 + (125*w)/6 - 25/24$$

$$(3125*w^4)/4 - (3125*w^3)/2 + (4375*w^2)/4 - (625*w)/2 + 775/24$$

$$- (3125*w^4)/6 + (3125*w^3)/2 - (6875*w^2)/4 + (1625*w)/2 - 3275/24$$

$$(3125*w^4)/24 - (3125*w^3)/6 + (3125*w^2)/4 - (3125*w)/6 + 3125/24$$



Fuente: Elaboración propia.

5. RESULTADOS.

En las Cuadros No. 1 y 2 se puede observar una columna de errores, que muestran una diferencia muy pequeña entre las funciones acumuladas exactas y la distribución Normal, este análisis implica que el error absoluto, para n=2, es casi igual a 0,01, la convergencia se nota más cuando para n=3, hacemos la comparación y el error es menor que 0,01, para n mayor se realiza la descripción de la función de densidad del promedio de n variables aleatorias, a través de la fórmula

de Irwin Hall y haciendo una transformación que permite mostrar, la cercanía entre la densidad del promedio con la distribución Normal estándar Gráficas No. 1, 2 y 3.

6. DISCUSIÓN

El proceso de enseñanza y aprendizaje en la universidad tiene una vivencia día a día en el aula que es función del contenido científico que el docente pretende que se apropie el estudiante, en esta tendencia la estrategia para este fin cambia con mucha frecuencia

de clase en clase, es así que esta ilustración pretende afirmar el conocimiento que debe tener el estudiante acerca del Teorema Central del Límite.

Seguramente hay otras estrategias para la enseñanza de este teorema y uso de nuevos recursos, la visión ilustrativa es una alternativa para la comprensión de este teorema.

7. CONCLUSIÓN

Para la comprensión del Teorema Central del Límite, se mostró que la distribución exacta del promedio de variables aleatorias independientes con distribución Uniforme en el intervalo $(0,1)$ tiende a la distribución Normal estándar, incluso con valores de n pequeños, como se vio en los Cuadros No. 1 y 2 y en las Gráficas No. 1, 2 y 3.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Barrera Ojeda, D. (2019). *Estadística Informatizada*. Stigma.
- Bernard, F. (1997). *A first course in Multivariate Statistic*. Springer.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons.
- Casella George y Berger Roger. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury Thomson.
- Dela Cruz, R. (1981). *Razonamiento Matemático Superior*. Lima Perú.
- Efimov A, Karakulin A., Pospelov P., Tereschenko A., Vukolov E., Zemskov V., Zolotarev Yu. (1986). *Problemas de las Matemáticas Superiores*. Mir Moscu.
- Fernández Cuesta y Fuentes García, Felipe. (1995). *Curso de Estadística Descriptiva Teoría y Práctica*. Barcelona: Ariel.
- Freund Jhon y Walpole, Ronald . (1990). *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Prentice Hall hispanoamericana.
- García Ore, C. (1997). *Distribuciones y Estadística Inferencial*. Lima Peru.
- Grimett, G. R., & Stirzaker, D. (1993). *Probability and Random Processes Problems and Solutions*. Oxford University.
- Gutierrez, B. (2004). *Respuestas a dudas típicas de Estadística*. Diaz de Santos.
- Hogg, R. (2005). *Introducción to Mathematical Statistics*. Pearson Prentice Hall.
- Johnson, N., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*. Wiley an Sons.
- Kendall Maurice y Buckland William. (1980). *Diccionario de Estadística*. Pirámide.
- Kreyszig, E. (1973). *Introducción a la Estadística Matemática*. Limusa Wiley.
- Lazaro, M. (2007). *Inferencia Estadística*. Moshera.
- Lijoletov I.I.y Matzkevich I.P. (1977). *Problemas de Matemática Superior Teoría de Probabilidad y de Estadística Matemática*. Paraninfo.
- Meyer, P. L. (1998). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Paraninfo.

- Mitacc Meza, M. (1998). *Tópicos de Estadística descriptiva y Probabilidad*. Lima Perú.
- Mitacc, M. (1998). *Tópicos de Inferencia estadística*. Lima Perú: Thales.
- Mood Alexander y Graybill Franklin. (1978). *Introducción a la teoría de la Estadística*. Aguilar.
- Obregón Sanin, I. (1977). *Teoría de la Probabilidad*. p. 247: Limusa.
- Parzen, E. (1979). *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*. Limusa.
- Rincon, L. (2007). *Curso Intermedio de Probabilidad*. UNAM.
- Ruiz Maya , L., & Martin Pliego , J. (2002). *Estadística II Inferencia*. Thomson.
- Ruiz Maya, L. (1992). *Problemas de Estadística*. AC Madrid.
- Sevastianov, B., Chistiakov , V., & Zubkov. (1985). *Problemas de Cálculo de Probabilidades*. Mir Moscu.
- Tucker, H. G. (1966). *Introducción a la teoría matemática de las probabilidades y a la estadística*. Vines vives.
- Velez Barrola, R. (2012). *Principios de Inferencia Estadística*. Madrid: Uned.
- Wisniewski Piotr Marian y Velasco Sotomayor Gabriel, Blanco Castaneda Liliana , Arunachalam Viswanathan y Dharmaraja Selvamuthu. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes*. Wiley and Sons.
- Yohai, V. (2008). *Notas de Probabilidades y Estadística*.
- Zacks, S. (2014). *Examples and Problems in Mathematical Statistics*. Wiley.

CONFIABILIDAD Y TIEMPO ÓPTIMO DE REEMPLAZO DE EQUIPO

RELIABILITY AND OPTIMAL EQUIPMENT REPLACEMENT TIME

Astrid Keitel Ruiz Aviles¹

Unidad Académica Campesina de Tiahuanacu – UCB, La Paz-Bolivia

✉ astrid.educa@gmail.com

Gustavo Ruiz Aranibar²

Ex-Docente Universidad Autónoma Gabriel René Moreno, Santa Cruz-Bolivia

✉ gustavoruiz432@hotmail.com ✉ ruizaranibargustavo@gmail.com

Artículo recibido: 08-08-2022

Artículo aceptado: 15-09-2022

RESUMEN

El modelo exponencial se utiliza en la prueba del ciclo de vida de un activo, sin embargo, es utilizado por ser eficaz para tratar problemas de confiabilidad, tomando una muestra al azar de n componentes seleccionados de un lote, en el presente trabajo se desarrolla dos aplicaciones mediante ejemplos de las distribuciones Normal y Weibull.

En cuanto al tiempo óptimo de reemplazo de equipo, considerando el aspecto teórico mencionado en el trabajo y aplicando los datos como el número de periodos, la tasa de interés, el costo de adquisición del equipo y los costos de mantenimiento se determina aquel punto en el cual el costo del modelo que, en lugar de bajar, sube su costo, éste es el período óptimo para reemplazar el equipo.

Se presentan los ejercicios prácticos, el primero corresponde a una empresa estatal con relación a la fabricación de piezas en el sistema de combustible; el segundo ejemplo identifica la vida media de un componente, el tercero determina el ciclo de vida de un activo; los ejemplos cuarto y quinto, se basan en el precio de adquisición para determinar el tiempo óptimo de renovación. En este sentido, con el objeto de aplicar la teoría expuesta, que permita identificar el momento exacto en el cual se debe reemplazar un equipo, para no generar daño económico, que reflejaría una pérdida a la institución. En conclusión, se otorga prioridad a la optimización de los escasos recursos que se disponen, fomentando la eficiencia y eficacia, generando efectividad de un activo fijo.

Palabras clave: Ciclo de vida, confiabilidad, costos, decisión, inferencia, mantenimiento, obsoleto.

ABSTRACT

The exponential model is used in the life cycle test of an asset, however, it is used because it is effective in dealing with reliability problems, taking a random sample of n components selected from a lot, in the present work two applications through examples of the Normal and Weibull distributions.

¹ Lic. Administración de Empresas, Universidad Católica Boliviana, Santa Cruz – Bolivia (Octubre, 1999), M. Sc. en Relaciones Internacionales y Diplomacia, Academia Diplomática Boliviana “Rafael Bustillo”, La Paz – Bolivia (Abril, 2004). Docente de Estadística, Unidad Académica Campesina de Tiahuanacu - Universidad Católica Boliviana, 2022. <https://orcid.org/0000-0002-8472-9477>

² Ing. de Minas, Universidad Técnica de Oruro – Bolivia (septiembre, 1969), Especialista en Estadística e Informática por la Universidad de Chile y de Lovaina – Bélgica. Ex-docente de Estadística por más de 30 años. Se agradece a la Universidad Autónoma Gabriel René Moreno – Bolivia, por la beca otorgada con fondos del Impuesto Directo a los Hidrocarburos, para cursar y culminar exitosamente el Doctorado en Ciencias en Educación Superior. Especializado en Estadística. <https://orcid.org/0000-0002-6714-6915>

Regarding the optimal time for equipment replacement, considering the theoretical aspect mentioned in the work and applying the data such as the number of periods, the interest rate, the cost of acquiring the equipment and the maintenance costs, that point in time is determined. which the cost of the model that, instead of lowering, raises its cost, this is the optimal period to replace the equipment.

The practical exercises are presented, the first corresponds to a state company in relation to the manufacture of parts in the fuel system; the second example identifies the average life of a component, the third determines the life cycle of an asset; the fourth and fifth examples are based on the purchase price to determine the optimal renewal time. In this sense, in order to apply the exposed theory, which allows identifying the exact moment in which an equipment must be replaced, so as not to generate economic damage, which would reflect a loss to the institution. In conclusion, priority is given to optimizing the scarce resources available, promoting efficiency and effectiveness, generating effectiveness of a fixed asset.

Key words: Convergence, Irwin Hall distribution, illustration, Central Limit Theorem.

1. INTRODUCCIÓN

Las organizaciones deben aprovechar el valor potencial de sus activos durante el ciclo de vida útil o tiempo de vida e incluyendo nuevos activos para operarlos, mantenerlos y desincorporarlos en el momento oportuno.

La teoría de reposición se ocupa de la determinación de la política de reposición más económica y de la predicción de los costos de reemplazar un producto. La estimación de los costos para un grupo de elementos cuya duración de vida tiene una determinada probabilidad, implica el cálculo de la distribución de probabilidad de la duración de vida, a partir de esto, el número de fallos como función de la edad del grupo de elementos.

La teoría del remplazo se ocupa de situaciones en las que la eficiencia tiende a deteriorarse con el tiempo, y que puede restablecerse hasta alcanzar un nivel previo mediante algún tipo de acción correctiva. El problema consiste en determinar los tiempos en los cuales dicha acción correctiva debe llevarse a cabo para optimizar cierta medida apropiada de efectividad (Sasieni, M. y otros 1967).

Elreemplazodeequipososusmantenimientos, es muy delicado, lo cual puede realizarse en base a una gran experiencia para obtener

resultados aceptables, pero a veces la intuición conduce a estimaciones incorrectas. Aplicando las matemáticas y en particular las probabilidades, se obtienen estimaciones muy correctas. La teoría del desgaste y de los reemplazos permite comprender mejor la vida de los equipos.

Se presentan ejercicios prácticos, con el objeto de aplicar la teoría expuesta, que permita identificar el momento exacto en el cual se debe reemplazar un equipo, para no generar daño económico a la institución. En conclusión, se otorga prioridad a la optimización de los escasos recursos que se disponen, fomentando la eficiencia y eficacia, generando la efectividad de un activo fijo.

2. MATERIAL Y MÉTODOS

En el siguiente acápite se otorga los conceptos teóricos generales que se aplican en el desarrollo de esta investigación, junto con la teoría de la confiabilidad, costos operacionales y reemplazo, vida económica de un activo, reposición de elementos que se hacen obsoletos, tiempo optimo de remplazo del equipo, con la colaboración del trabajo computacional desarrollado por el autor.

Por otro lado, se desarrollan ejercicios de aplicación de la teoría descrita.

2.1. Conceptos Generales

El objetivo de cualquier departamento de mantenimiento de una organización es prevenir o mitigar el deterioro del desempeño de los activos en servicio, y gestionar el riesgo de una falla cuando se pierde la función deseada del activo (Criollo, A. & Quito, M. 2020). Es una buena práctica de gestión de activos tener una lista de estrategias de mantenimiento para asegurar un nivel aceptable y predecible del desempeño a través de la vida útil del activo, lo cual incluye inspecciones, monitoreo o pruebas en línea, y política de mantenimiento preventivo (basado en el tiempo, en la condición y en el uso). En el caso de elementos cuyo rendimiento disminuye con los años (máquinas, herramientas, vehículos), la estimación de los costos implica la determinación de aquellos factores que contribuyen al aumento de los costos de operación, tiempo ocioso obligado, materiales de desperdicio, aumento de las reparaciones, etcétera (Chavez, J. 2021).

El mantenimiento se define como el aseguramiento de que un activo físico continúe realizando las funciones para los que fueron creados, el mantenimiento preventivo es una serie de tareas planeadas previamente que se llevan a cabo para contrarrestar las causas conocidas de fallas potenciales de dichas funciones, este mantenimiento preventivo se lleva a cabo para asegurar la disponibilidad y confiabilidad del equipo, (Diaz, L. 2019), es decir que la disponibilidad se define como la probabilidad de que un equipo sea capaz de funcionar siempre que se lo necesite, en cambio un mantenimiento correctivo o de reparación de los componentes de un equipo, se efectúa para que sea capaz de realizar su función adecuadamente.

2.3. Teoría de la Confiabilidad

La confiabilidad se define como la

probabilidad de que un sistema, equipo o dispositivo cumpla su función, para lo cual fue adquirido durante un periodo de tiempo establecido bajo condiciones operacionales preestablecidas tales como temperatura, presión del caudal, pH entre otras variables de proceso en el contexto operacional definido (Alegria, R. 2018). El análisis del comportamiento de fallas de una gran cantidad de poblaciones de componentes o equipos observados durante largos periodos de estudio, han mostrado una función tasa de fallas decreciente en el primer periodo (Valenzuela, M. 2020), la primera etapa del periodo de observación (fenómeno conocido como arranque o mortalidad infantil), seguido por una función tasa de fallas aproximadamente constante (operación normal o aleatoria), y finalmente una función tasa de fallas creciente durante la última etapa del periodo de observación (envejecimiento o desgaste).

En el análisis de confiabilidad, existen varias distribuciones de probabilidad que se usan frecuentemente, como ser:

- a) La distribución binomial, que se usa en varios problemas de confiabilidad de tipo combinatorio, esta distribución es útil cuando se relaciona con la probabilidad de salida tal como el número total de fallas en secuencia de k ensayos, donde cada ensayo tiene dos posibles resultados (falla o no falla) y la probabilidad de falla es la misma para cada ensayo (Johnson, R. 1997), siendo esta distribución discreta de probabilidad la siguiente:

$$b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

- b) La distribución de Poisson, que es utilizada cuando se está interesado en la ocurrencia de un número de eventos que son del mismo tipo (Newbold, P. 1998),

esta distribución discreta de probabilidad esta expresada por:

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

- c) La distribución exponencial, que es muy utilizada en forma amplia y eficazmente para tratar problemas de confiabilidad en ingeniería, especialmente en la prueba del ciclo de vida, debido a que muchos procesos en ingeniería muestran una razón constante de riesgo durante su vida útil (Johnson, R. 1997) (Gmurman, V. 1976); la función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{para } x > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{de otra parte} \end{cases}$$

La distribución de tiempos de falla de cada componente:

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad t > 0, \alpha > 0$$

Vida acumulada hasta r fallas, prueba sin reemplazo:

$$T_r = \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r$$

Estimación de la vida media:

$$\hat{\mu} = \frac{T_r}{r}$$

Vida acumulada hasta r fallas, prueba con reemplazo:

$$T_r = nt_r$$

Razón de falla:

$$\hat{R}_f = \frac{1}{\hat{\mu}}$$

Intervalo de confianza para la vida media:

$$\frac{2T_r}{\chi_{\alpha/2}^2} < \mu < \frac{2T_r}{\chi_{1-\alpha/2}^2}$$

Región crítica (Dagnelie, P., 1973) para probar su aceptación o rechazo:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$T_r > \frac{1}{2} \mu_0 \chi_{\alpha}^2$$

Donde:

n = número de componentes que se ponen a prueba

r = número de componentes que han fallado ($r \leq n$)

$2r$ = grados de libertad para el valor crítico de χ^2

$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$ = tiempos observados de falla

- d) La distribución de Rayleigh, que es utilizada en trabajos de confiabilidad asociados a problemas en teoría del sonido (Merovci, F. 2014), su función de densidad esta dado por:

$$f(t) = \frac{2}{\theta^2} t e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2} \quad t > 0, \theta > 0$$

- e) La distribución normal, la cual en estudios de confiabilidad es frecuente encontrar tiempos de vida útil que admiten una distribución normal (Berenson, L.; Levine, M. 1997), cuya función de densidad continua es:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Confiabilidad y tiempo óptimo de reemplazo de equipos

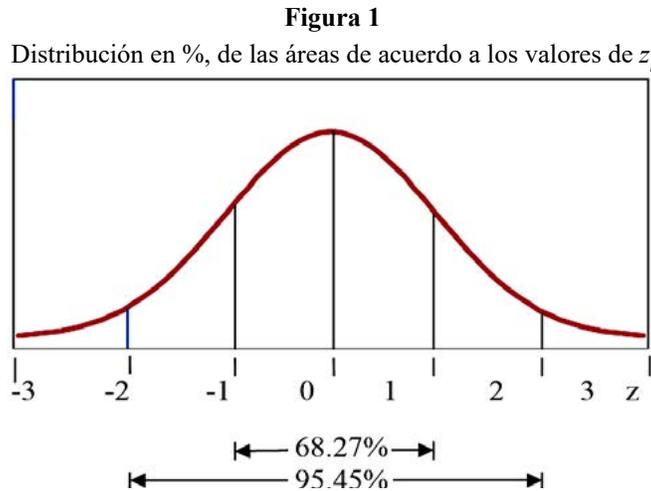
Cuando la variable X esta expresada en unidades de desviación: z, se tiene la distribución normal estandarizada:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \text{si} \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad -\infty < z < \infty$$

Esta distribución permite determinar la probabilidad deseada haciendo referencia

a las tablas de valores del área bajo la curva de densidad normal estandarizada (ACHESON, D. 1974).

Interpretación en %, de las áreas de acuerdo a los valores de z_i , el gráfico de la distribución descrita se presenta en la Figura 1.



Fuente: Elaboración propia (2022), en base a la Figura 7.1. del libro de Murray, R. & Spiegel, Larry (2001), p. 159.

El área total limitada por la curva y el eje de la abscisa entre $-\infty < z < \infty$ es la unidad.

f) La distribución de Weibull, es una de las distribuciones más utilizadas en teoría de la confiabilidad debido a su gran versatilidad, se usa habitualmente en la teoría de fiabilidad, a fin de describir el tiempo de funcionamiento sin fallo de los instrumentos (Palacio, S. 1998), se caracteriza porque los diferentes valores de sus parámetros pueden generar una familia de distribuciones cuyos casos específicos coinciden con otras distribuciones, como la Exponencial, Normal y Raleigh entre otras.

Estrechamente relacionada con la distribución exponencial esta la distribución de Weibull (Johnson, R. 1997) (Ostle, B. 1979), cuya densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Evaluando la probabilidad de que una variable aleatoria con la distribución de Weibull adopte un valor menor que x , se tendrá la integral:

$$\int_0^x f(x) = \int_0^x \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx$$

Función de confiabilidad

$$R(x) = e^{-\alpha x^\beta}$$

Función de razón de falla

$$Z(x) = \alpha \beta x^{\beta-1}$$

Media

$$\mu = \int_0^\infty x \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx$$

$$\mu = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Varianza

$$\sigma^2 = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\}$$

$$\Gamma n = (n-1)!$$

Para mayor comprensión de estas distribuciones como ser: sus funciones acumulativas, propiedades, determinación de parámetros, etcétera, se recomienda recurrir a la bibliografía u otros textos de estadística.

2.4. Costos Operacionales y Reemplazamiento

Si las fallas persisten en uno o más equipos, los costos irán incrementándose, llegando un momento en el que no será económico seguir efectuando los mantenimientos preventivos lo que significa que sería mejor reemplazar los equipos, para lo cual se debe tomar en cuenta las razones básicas para considerar el reemplazo de un activo, los cuales son:

- a) El deterioro físico se refiere a cambios en las condiciones físicas del activo mismo, puede conducir a una declinación en el valor del servicio prestado, a unos costos operarios mayores, al aumento en los costos de mantenimiento, demanda mayores gastos y eleva el consumo de combustible aumentando sus costos de operación. Estos costos tienden a incrementarse con el tiempo, cuando no se llega a efectuar la tarea planeada, éstos pueden ser consumo de energía, consumo de materia prima, materiales consumibles, tiempo consumido por los operadores, reparaciones menores, entre otros.
- b) La obsolescencia que describe los efectos que producen sobre un activo los cambios que se generan en el medio externo, los cambios rápidos de la tecnología

de automatización, computadoras y las comunicaciones hacen que los sistemas utilizados y el desempeño de los activos aceptables, sean menos seguros y productivos que los equipos que ofrecen en el mercado.

- c) El desempeño reducido se debe al deterioro físico, a la capacidad de funcionamiento para un nivel de confiabilidad esperado.
- d) Alteración de necesidad son las nuevas necesidades de precisión, velocidad y otras especificaciones exigidas.
- e) Reemplazo por insuficiencia de un activo físico que tiene una capacidad inadecuada para prestar los servicios deseados.
- f) Depreciación, se refiere a una disminución en el valor del activo físico.

La economía de desechar una unidad funcionalmente productiva radica en la conservación del esfuerzo, energía, materiales y tiempo que resulta de su reemplazo; en virtud al aumento del costo al seguir utilizando el equipo obsoleto. Existe la alternativa del reemplazamiento del equipo por el nuevo, la experiencia aconseja que es más económico reemplazar el equipo obsoleto que continuar con un costo creciente de mantenimiento y entonces el ahorro derivado del uso del nuevo equipo compensa de sobra su costo inicial, de ahí que se debe emplear una política de reemplazamiento, lo cual exige el estudio de ciertas relaciones entre los costos relativos a la minimización de éstos, y la elaboración de algún método para estimar dichos costos basándose en las distribuciones de frecuencia de vida. Por lo tanto, el reemplazo debe basarse en factores económicos.

2.5. Vida Económica de un Activo

Es el intervalo que minimiza los costos totales anuales equivalentes del activo o que maximiza su ingreso anual equivalente neto. La vida económica se la conoce como la vida de costo mínimo o el intervalo óptimo de reemplazo, siendo uno de los determinantes de la vida económica de un activo el patrón de costos en que incurre por las actividades de operación y mantenimiento.

Frecuentemente un analista desea conocer cuánto tiempo debe permanecer un activo o proyecto en servicio para minimizar su costo total, considerando el valor del dinero en el tiempo y los requerimientos de retorno, este tiempo en años es un valor n y se denomina de varias maneras incluyendo el costo de vida útil, vida útil económica, tiempo de retiro o reemplazo; el valor n es el número de años que rinde a un mínimo costo anual.

El valor comercial de un activo es la cantidad anual que se recibe en unidades monetarias (u. m.) si es vendido en el mercado abierto, siendo este precio del mercado utilizado en los estudios económicos para el reemplazo de activos.

2.6. Reposición de Elementos que se Hacen Obsoletos

La posible política de reposición es comparada utilizando la medida del rendimiento, que es el valor actual o descontado de todos los costos futuros correspondientes a cada política. En el momento en que se adopta la decisión política, el costo descontado es la cantidad que sería necesaria para formar a interés compuesto una cantidad lo suficientemente grande para pagar el costo de reposición cuando llega el momento (Churchman y otros, 1973).

Al considerar las decisiones de reposición deben incluirse todos los costos que dependen de la elección o duración de la máquina. Por lo general, solo se considera los costos realizados, pero cuando los costos nominales afectan al movimiento de aquellos deben también tomarse en cuenta. Los costos de mantenimiento constituyen un factor complicado, éstos tienen lugar sobre un periodo de tiempo y el dinero tiene un valor en el tiempo.

El costo descontado es el valor actual del costo, y se obtiene mediante la expresión:

$$Cd = \frac{Cn}{(1+r)^{n-1}}$$

En la que C_n es el costo inicial del n ésimo año, r el tipo de descuento anual (costo del dinero), n es el número de años.

2.7. Tiempo Óptimo de Reemplazo del Equipo

Esta determinación se la efectúa considerando una serie de periodos cronológicos 1,2,3,4,... de igual longitud, que están numerados $\forall i=1,n$, para cada uno de ellos le corresponde un costo de mantenimiento C_p en esos periodos.

Estos costos aumentan en forma monótona o sea $C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_n$, donde los gastos se pagan al principio del período correspondiente. Si el gasto inicial de compra es A , el costo cuando el equipo se reemplaza después de n periodos, considerando que r es la tasa de interés (Churchman y otros 1973), será:

$$K_n = \left(A + C_1 + \frac{C_2}{1+r} + \frac{C_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^{n-1}} \right) + \left(\frac{A}{(1+r)^n} + \frac{C_1}{(1+r)^n} + \frac{C_2}{(1+r)^{n+1}} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^{2n-1}} \right) + \dots$$

Lo que puede escribirse como:

$$K_n = \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{i-1}} \right) + \frac{1}{(1+r)^n} \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{i-1}} \right) + \frac{1}{(1+r)^{2n}} \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{i-1}} \right) + \dots$$

Teniéndose posteriormente:

$$K_n = \frac{A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{i-1}}}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} = \frac{A + \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} C_i}{1 - \alpha^n}$$

donde: $\alpha = \frac{1}{1+r}$

K_n es la cantidad de dinero necesario para pagar todos los costos futuros de adquisición y explotación del equipo que es renovado cada n años o sea que representa el monto que habrá que disponer en el origen del tiempo para reemplazar el material todos los n periodos, durante un tiempo infinito. Si K_n es menor que K_{n+1} , es preferible reemplazar el equipo cada n años en lugar de $n + 1$ años, si la mejor política es la de hacer la reposición cada n deben cumplirse las dos desigualdades:

$$K_{n+1} - K_n > 0 \text{ y } K_{n-1} - K_n > 0$$

El mínimo de K_n se obtiene mediante la regla: “No reemplazar el equipo sino hasta que el costo del período que sigue sea mayor que la suma ponderada de los gastos ya efectuados”: Es decir reemplazar cuando:

$$C_{n+1} \geq \frac{A + C_1 + C_2\alpha + \dots + C_n\alpha^{n-1}}{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}}$$

Conociendo el número de periodos n (años), la tasa de interés r , el costo del equipo A (u. m.) y los costos de mantenimiento (), se deben determinar cada uno de los

conceptos siguientes designados en la tabla de resultados:

n	= Número de periodos
C_i	= Costo de mantenimiento (u. m)
r	= Tasa de interés
r^{i-1}	= Factor de descuento
$C_i * r^{i-1}$	= Costo total del equipo
$A + \sum_{i=2}^n C_i * r^{i-1}$	= Costo variable del equipo
$\sum_{i=2}^n r^{i-1}$	= Interés de descuento
$\frac{A + \sum_{i=2}^n C_i * r^{i-1}}{\sum_{i=2}^n r^{i-1}}$	= Costo del modelo

Para finalizar, una vez calculadas estas expresiones para los n periodos (Kaufmann, A. 1967), se comparará con:

$$C_{i-1} \geq \frac{A + \sum_{i=2}^n C_i * r^{i-1}}{\sum_{i=2}^n r^{i-1}}$$

Como resultado de esta desigualdad, se establecen las siguientes reglas para la minimización de los costos:

- a) No hacer la reposición si el costo del período siguiente es menor que el costo obtenido por el modelo de los costos anteriores.
- b) Hacer la reposición si el costo obtenido por el modelo del período siguiente es mayor de los costos anteriores.

3. APLICACIONES

3.1. Trabajo Computacional

Los diferentes cálculos se lo efectúan mediante un programa computacional (Ruiz, G. 1970 - 2022), de acuerdo a las expresiones señaladas en los modelos de confiabilidad y de renovación de equipo, el cual facilita la determinación de

resultados, siendo la información señalada, la que se utiliza para su procesamiento computacional (Desbazeille, G. 1972).

3.2. Ejercicios de ejemplo

Ejemplo 1. La Empresa Nacional de Fundiciones Vinto – Oruro (ENAF) fabrica uniones para determinados equipos de la Corporación Minera de Bolivia (COMIBOL), las cuales se han diseñado para sellar conexiones y piezas en el sistema de combustible a fin de impedir fugas. Un tipo de unión ha de tener 5 cm. de diámetro para que encaje como es debido; no puede variar arriba o abajo en más de 0.25 cm. sin provocar una fuga peligrosa. ENAF afirma que esta unión tiene 5 cm. de media con una desviación estándar de 0.17 cm. Si estas cifras son correctas y se supone una distribución normal de los diámetros, los funcionarios de COMIBOL desean determinar:

- a) La proporción de uniones que se adaptarán correctamente.
- b) La proporción de uniones que son defectuosas.

- c) La probabilidad de que cualquier unión tenga un diámetro superior a 5.29 cm.
- d) La media de una muestra de 100 uniones producidas por ENAF resulta ser 4.92 cm., con una desviación estándar de 0.35 cm. Si es la duración media de todas las uniones producidas por ENAF, comprobar la hipótesis de contra la hipótesis alternativa , a los niveles de confianza del 95 % y 99 %.

Solución.

Como las uniones pueden alejarse en 0.25 cm, de 5 cm. sin provocar una situación peligrosa, COMIBOL desea que se determine:

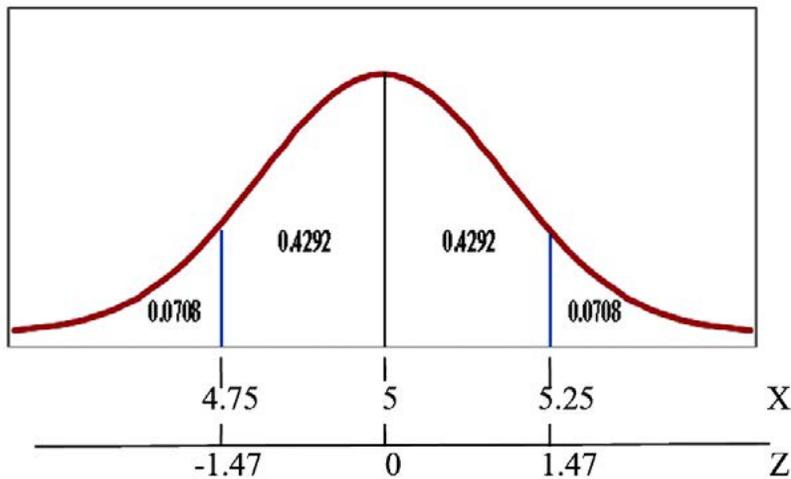
$$P(4.75 \leq X \leq 5.25)$$

$$z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{4.75 - 5}{0.17} = -1.47 \text{ o un área de } 0.4292 \text{ y } 0.5 - 0.4292 = 0.0708$$

$$z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{5.25 - 5}{0.17} = 1.47 \text{ o un área de } 0.4292$$

Interpretación de los valores de Z_i en la distribución normal estandarizada de la Figura 2, representa lo indicado.

Figura 2
Interpretación de los valores de Z_i en la distribución normal estandarizada



Fuente: Elaboración propia (2022)

$$P(4.75 \leq X \leq 5.25) =$$

$$P(-1.47 \leq Z \leq 1.47) = 0.8584$$

- a) Lo que significa que el 85.84 % de las uniones fabricadas por la empresa encajan a la perfección, o sea que hay una probabilidad de 85.84% de que cualquier unión elegida aleatoriamente sea correcta, llegando a tener este porcentaje de confiabilidad.

- b) La proporción de uniones defectuosas es:

$$P(X \leq 4.75) + P(X \geq 5.25) =$$

$$z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{4.75 - 5}{0.17} = -1.47 \text{ o un área de } 0.4292$$

$$P(X \leq 4.75) = P(Z \leq -1.47) =$$

$$0.5 - 0.4292 = 0.0708$$

$$z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{5.25 - 5}{0.17} = 1.47 \text{ o un área de } 0.4292$$

$$P(X \geq 5.25) = P(Z \geq 1.47) =$$

$$1 - 0.9292 = 0.0708$$

$$P(X \leq 4.75) + P(X \geq 5.25) = 0.1416$$

- c) Determinar:

$$P(X \geq 5.29) =$$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{5.29 - 5}{0.17} = 1.7059 \text{ o un área de } 0.9564$$

$$P(X \geq 5.29) = P(Z \geq 1.7059) = 1 - 0.9564 = 0.0436$$

- d) Se tiene que decidir entre las dos hipótesis:

$$H_0 : \mu = 5 \text{ cm}$$

$$H_1 : \mu \neq 5 \text{ cm}$$

El problema es un ensayo bilateral puesto que $\mu \neq 5$ incluye valores menores y mayores a 5. Al nivel de significación de 0.05 se tiene la siguiente regla de decisión:

Rechazar H_0 si la z de la media muestral esta fuera del rango de -1.96 a 1.96.

Se acepta H_0 en caso contrario o no se toma decisión alguna.

Como $\alpha = 0.05$ entonces se determina:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \quad \text{y} \quad 1 - 0.025 = 0.975$$

encontrando en tablas $z = \pm 1.96$.

El estadístico considerado es la media muestral \bar{X} . La distribución muestral de \bar{X} tiene una media $\mu_{\bar{x}} = \mu$ y una desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{N}$, donde μ y σ , son la media y la desviación estándar de la población de todas las uniones producidas por ENAF.

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.35 / \sqrt{100} = 0.035$$

$$z = \frac{\bar{X} - 5}{0.035} = \frac{4.92 - 5}{0.035} = -2.2857$$

Este valor esta fuera del rango de -1.96 a 1.96 por lo que se rechaza H_0 al nivel de significación del 0.05.

Al nivel de significación $\alpha = 0.01$ se determina el rango $z = \pm 2.58$; y como $z = -2.2857$ muestra que está dentro el rango, por consiguiente se acepta la hipótesis H_0 o no se toma ninguna decisión al nivel de confianza del 99 %.

Nota. Solo se representó gráficamente el inciso a) las áreas determinadas de acuerdo

a lo calculado, para mejor interpretación de los incisos b), c) y d) se recomienda graficar e identificar en ellas cada área de acuerdo a los valores determinados de z.

Interpretación. Por consiguiente, al nivel de significación de α , se acepta la hipótesis H_0 . Por tanto, no se toma ninguna decisión, porque el valor que se ha determinado se encuentra dentro del rango, que indica la inexistencia de fuga de combustible.

Ejemplo 2. Si se tiene n unidades que se someten a una prueba de ciclo de vida (sin reemplazo) y la prueba será truncada después de que r unidades hayan fallado, dados los tiempos (horas) de estas r primeras fallas como se muestra en los datos, se desea determinar:

- a) Estimar la vida media del componente.
- b) Su razón de falla.
- c) Calcular un intervalo de confianza de 90% para μ
- d) Probar para la razón de falla dada para un número determinado de horas.

Datos:

$$n = 80, r = 15$$

$$t_i = 70, 101, 157, 202, 299, 320, 364, 455, 563, 638, 724, 771, 835, 861, 882$$

Solución.

Aplicando las formulas dadas de la distribución exponencial para los incisos a), b) c), se tiene los siguientes cálculos:

$T_r = 71172$ Vida acumulada hasta r fallas, prueba sin reemplazo, en horas.

$\hat{\mu} = 4774.8$ Estimación de la vida media del componente en horas.

$\hat{R} = 2.107571E-04$ Estimación de la razón de

falla, fallas por hora o 0.2107571 fallas por millar de horas.

$$7697.183 < \mu < 3251.868 \quad \text{Intervalo de confianza de 90\%}$$

$\mu = 3333.334$ Razón de falla es 0.45 por 1500 horas

1. Hipótesis nula: $\mu = 3333.334$ horas

Hipótesis alternativa $\mu > 3333.334$ horas

2. Nivel de significación: $\alpha = 5\%$

3. Criterio: Rechazar la hipótesis nula si

$$T_r > \frac{1}{2} \mu_0 \chi_{0.05}^2 \quad \text{donde } \chi_{0.05}^2 = 43.773 \text{ con 30 g.l.}$$

4. Cálculos: Sustituyendo $r = 15$ y $\mu_0 = 3333.334$, se encuentra el valor crítico para esta prueba.

$$\frac{1}{2} \mu_0 \chi_{0.05}^2 = \frac{1}{2} * 3333.334 * 43.773 = 30821.67$$

Decisión: Como $T_0 = 4744.8$ excede el valor crítico, se debe rechazar la hipótesis nula, concluyendo que el tiempo de vida media excede a 3333.334 horas o de manera equivalente, que la razón de falla es menor que 0.45 fallas por millar de horas.

Interpretación. Por consiguiente, al nivel de significación de α , no se acepta la hipótesis nula μ . Por tanto, el tiempo de vida media excede al número de horas objeto de estudio y se acepta la hipótesis alternativa.

Ejemplo 3. El ciclo de vida de una batería de respaldo de emergencia (en horas) es una variable aleatoria X con la distribución de Weibull con $\alpha = 0.1, \beta = 0.5$ determinar:

- a) El ciclo de vida medio de estas baterías.
- b) La probabilidad de que la batería de este tipo dure más de 300 horas.

Solución.

a). El ciclo de vida medio de estas baterías. Sustituyendo en:

$$\mu = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = (0.1)^{-2} \Gamma(3) = 200 \text{ horas}$$

b) La probabilidad de que la batería de este tipo dure más de 300 horas. Sustituyendo en:

$$\int_0^a \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx$$

Realizando la integración, se obtiene:

$$\int_{300}^{\infty} 0.05 x^{-0.5} e^{-0.1x^{0.5}} dx = e^{-0.1(300)^{0.5}} = 0.177$$

Interpretación. De acuerdo a las fórmulas indicadas, se obtiene el ciclo de vida medio de las baterías y la probabilidad de que duren más de un determinado número de horas. Por tanto, estos dispositivos de almacenaje de energía eléctrica pueden seguir funcionando como mínimo 200 horas o más, siendo posible ser utilizadas hasta 300 horas, con la probabilidad de 17,7% de que no fallará.

Ejemplo 4. Teniéndose un equipo con el precio de adquisición de 20200 u. m., donde los costos de mantenimiento están dados en la segunda columna de la tabla de resultados, en la que se considera una tasa anual del 8 % para un periodo de 15 años. Con dicha información se desea determinar el tiempo óptimo de renovación.

Solución.

- Número de periodos 15
- Tasa de interés 8 %
- Costo del equipo 20200 u. m.
- Nomenclatura del cuadro de resultados:
 - 1 = Periodo
 - 2 = Costo de mantenimiento en u. m. (unidades monetarias)
 - 3 = Factor de descuento

- 4 = Costo total del equipo
- 5 = Costo variable del equipo
- 6 = Interés de descuento
- 7 = Costo determinado por el modelo (periodo a determinarse)

Tabla 1

Cálculo del tiempo óptimo de renovación

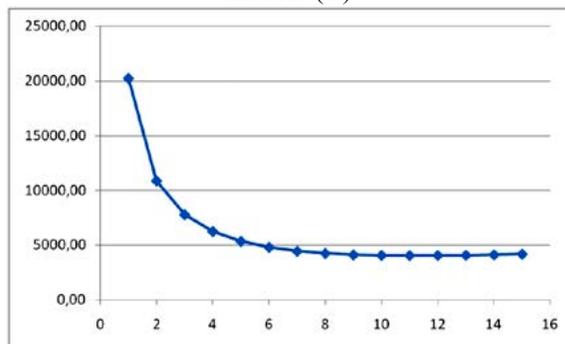
1	2	3	4	5	6	7
1	600,00	1,00	600,00	20200,00	1,00	20200,00
2	730,00	0,93	675,93	20875,93	1,93	10839,42
3	800,00	0,86	685,87	21561,80	2,78	7746,94
4	850,00	0,79	674,76	22236,56	3,58	6216,37
5	1000,00	0,74	735,03	22971,59	4,31	5327,21
6	1250,00	0,68	850,73	23822,31	4,99	4771,42
7	1550,00	0,63	976,76	24799,08	5,62	4410,39
8	2300,00	0,58	1342,03	26141,10	6,21	4211,98
9	2600,00	0,54	1404,70	27545,80	6,75	4082,89
10	3500,00	0,50	1750,87	29296,68	7,25	4042,66
11	3800,00	0,46	1760,13	31056,81	7,71	4028,08
12	4200,00	0,43	1801,31	32858,12	8,14	4037,14
13	4400,00	0,40	1747,30	34605,42	8,54	4054,02
14	5000,00	0,37	1838,49	36443,91	8,90	4093,00
15	5500,00	0,34	1872,53	38316,44	9,24	4144,90

La renovación del equipo se realizará en el período 11

Fuente: Elaboración propia (2022)

Figura 3.

Gráfico del periodo (X) y el costo determinado por el modelo (Y)



Fuente: Elaboración propia (2022)

La representación gráfica del periodo y el costo determinado por el modelo muestran una función parabólica, puesto que a medida que aumenta el costo de mantenimiento aumentara el costo determinado por el modelo, y en esta función lo más importante es determinar el punto mínimo que se encuentra entre los valores de 4028.08 y 4037.14, costos encontrados por el modelo

Confiabilidad y tiempo óptimo de reemplazo de equipos

para un periodo determinado.

Interpretación. De acuerdo a los resultados obtenidos, tanto numéricos como en forma gráfica, en base al costo determinado por el modelo, se debe renovar el equipo en el periodo donde el costo mencionado que va descendiendo e inicia a ascender. Por tanto, en este ejemplo la renovación será en el periodo 11, que es 4028,08, siendo el costo más bajo al que se obtiene, a partir del periodo 12, que es de 4037,14, teniéndose una diferencia negativa de 8,86, sucesivamente generando la citada diferencia negativa mayor con los periodos continuos.

Ejemplo 5. Un equipo tiene un precio de adquisición de 50 u. m., donde los costos de mantenimiento están dados en la segunda columna de la tabla de resultados, en la que se considera una tasa anual del 5 % para un periodo de 10 años. Con dicha información se desea determinar el tiempo óptimo de renovación.

Solución.

Número de periodos	11
Tasa de interés	5 %
Costo del equipo	80 u. m.

Tabla 2
Cálculo del tiempo óptimo de renovación

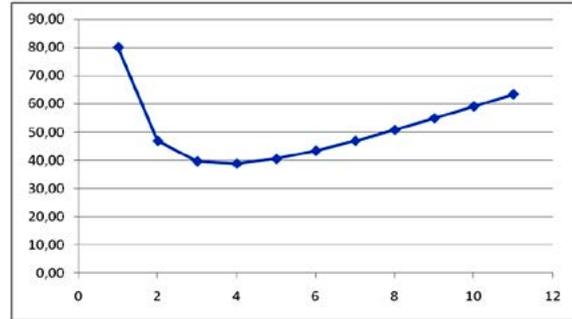
1	2	3	4	5	6	7
1	0,00	1,00	0,00	80,00	1,00	80,00
2	12,00	0,95	11,43	91,43	1,95	46,83
3	24,00	0,91	21,77	113,20	2,86	39,59
4	36,00	0,86	31,10	144,30	3,72	38,76
5	48,00	0,82	39,49	183,79	4,55	40,43
6	60,00	0,78	47,01	230,80	5,33	43,31
7	72,00	0,75	53,73	284,52	6,00	46,83
8	84,00	0,71	59,70	344,22	6,79	50,72
9	96,00	0,68	64,98	409,20	7,46	54,83
10	108,00	0,64	69,62	478,82	8,11	59,06
11	120,00	0,61	73,67	552,49	8,72	63,35

La renovación del equipo se realizará en el período 4

Fuente: Elaboración propia (2022)

Figura 4.

Gráfico del periodo (X) y el costo determinado por el modelo (Y)



Fuente: Elaboración propia (2022)

Al igual que en el ejemplo anterior, la representación gráfica del periodo y el costo determinado por el modelo muestran una función parabólica, puesto que a medida que aumenta el costo de mantenimiento aumentara el costo determinado por el modelo, y en esta función lo más importante es que se determinó el punto mínimo que se encuentra entre los valores de 38.76 y 40.42, costos encontrados por el modelo para un periodo determinado.

Interpretación. De acuerdo a los resultados obtenidos, tanto numéricos como en forma gráfica, en base al costo determinado por el modelo, se debe renovar el equipo en el periodo donde el costo mencionado que va descendiendo e inicia a ascender. Por tanto, en este ejemplo la renovación será en el periodo 4, que es 38,76, siendo el costo más bajo al que se obtiene, a partir del periodo 5, que es de 40,43, teniéndose una diferencia negativa de 1,67, sucesivamente generando la citada diferencia negativa mayor con los periodos continuos.

4. DISCUSIÓN

En las dos primeras aplicaciones, se han llegado a utilizar los valores de la distribución normal estandarizada y aplicar un test estadístico de significación, para aceptar o no su rango a un determinado nivel

de confianza. En el tercer ejemplo, se hace referencia a la distribución de *Weibull* para determinar el ciclo medio de vida, haciendo uso de la probabilidad de que un equipo dure más de un tiempo fijado, integrando la función señalada. Se puede observar que en los ejemplos 4 y 5, de acuerdo al costo determinado por el modelo del equipo, este va descendiendo y en el momento en que incrementa este valor, se ha establecido el periodo óptimo de renovación, otorgando prioridad a la eficiencia y eficacia. En forma semejante, los gráficos y tablas presentados, precedentemente concuerdan con lo correspondientemente señalado.

5. CONCLUSIONES

En conclusión, debido a la simplicidad de los procedimientos estadísticos, las distribuciones de probabilidad mencionadas como ser normal, exponencial, etcétera, adoptando estas técnicas a la información que se posea, para la confiabilidad y la finalidad de encontrar el tiempo óptimo de reemplazo de equipos.

En cuanto a la renovación de equipos, cuando la desigualdad mostrada acontece significa que se determinó el período óptimo de renovación del equipo debido a que a medida que pasa el tiempo los costos de

mantenimiento de los equipos aumentan, siendo imprescindible determinar cuándo se los debe reemplazar, tal como se muestra en los ejemplos donde en función de sus costos de mantenimiento, es conveniente reemplazarlos.

Por medio de la teoría expuesta, se permite identificar el periodo en el cual se debe reemplazar un equipo, o si se lo debe continuar usando, con el objetivo último de no generar daño económico, que reflejaría una pérdida para la institución. En este sentido, se otorga prioridad a la optimización de los escasos recursos que se disponen, fomentando la eficiencia y eficacia, generando efectividad de un activo fijo.

6. COLABORACIÓN

Lic. Osman Miranda Lira. Universidad Mayor, Real y Pontificia de San Francisco Xavier de Chuquisaca, Sucre – Bolivia (2016). Lic. en Bio – Imagenología.

Diplomado en Aplicación de Protocolos en Tomografía, Área: Ciencias de la Salud PACS_NRO_002/2022. Universidad Pública de El Alto. El Alto – Bolivia (Julio, 2022)

Docente de Imagenología Aplicada, Universidad Católica Boliviana. La Paz – Bolivia, 2022.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Acheson, D. (1974), *Quality Control and Industrial Statistics*, Irwin-Dorsey International, (4ta ed. p. 945). London - England.

Alegria, R. (2018) *Aplicación del mantenimiento centrado en la confiabilidad RCM en el sistema de freno neumático de los “Buses Puma Katari”* (Doctoral dissertation). (1ª ed., p. 9 - 15). Universidad Mayor

de San Andrés. Recuperado el 25 de agosto de 2022, de <https://repositorio.umsa.bo/bitstream/handle/123456789/16748/PG-2018-Alegr%c3%ada%20Laura%2c%20Roger.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Berenson, L.; Levine, M. (1997), *Estadística Básica en Administración*. Editorial: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., (6ta. Ed., p. 943) México D.F. - México.

- Chavez, J. (2021). *Análisis de los costos unitarios, para incrementar la rentabilidad en CIA minera Century MiningPeruSAC.-UO San Juan operaciones.*(1ª ed., p. 13 - 17). Universidad Nacional San Agustín de Arequipa. Recuperado el 25 de agosto de 2022, de <http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12773/13250/1Mchavja.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- Churchman, C.; Ackoff, L.; Arnoff, E., (1973) *Introducción a la Investigación Operativa*, (1ra ed. p. 467; 474). Editorial Aguilar. Madrid – España.
- Criollo, A.&Quito, M. (2020). *Desarrollo de una propuesta metodológica para la gestión de activos físicos en la planta de Continental Tire Andina (CTA)*, Cuenca (Master's thesis). (1ª ed., p. 10 - 12). Universidad Politécnica Salesiana Ecuador. Recuperado el 25 de agosto de 2022, de <https://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/19104/1/UPS-CT008812.pdf>
- Dagnelie, P., (1973) *Théorie et Méthodes Statistiques*. (Volume 1). Editorial : Les Presses Agronomiques de Gembloux, (2da. ed. p. 327). Gembloux – Bélgica.
- Desbazeille, G., (1972). *Exercices et Problèmes de Recherche Opérationnelle*, Editorial: Dunod, (1ra ed. p. 259). Bruxelles-Bélgica.
- Diaz, L. (2019). *Diseño de un modelo de sistema de gestión de mantenimiento según NB 12017: 2013 como instrumento de control interno para la empresa de transporte por cable Mi Teleférico caso: Cabinas (Doctoral dissertation).*(1ª ed., p. 14 - 19). Universidad Mayor de San Andrés. Recuperado el 25 de agosto de 2022, de <https://repositorio.umsa.bo/bitstream/handle/123456789/28405/TM-%2069.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Gmurman, V., (1976) *Problemas de la Teoría de las Probabilidades y de Estadística Matemática*. Editorial MIR, (1ra ed., p. 163). Moscú – Rusia.
- Johnson, R. (1997), *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Editorial: Prentice Hall Hispanoamericana S.A., (5ta. Ed., p. 548). México D.F. – México.
- Kaufmann A., (1967). *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*, Compañía Editorial Continental S. A., (1ra ed. p. 250). México D.F – México.
- Merovci, F. (2014). *Transmuted generalized Rayleigh distribution*. Journal of Statistics Applications & Probability, (1ª ed., p. 1 - 12). University of Prishtina - Kosovo. Recuperado el 25 de agosto de 2022, de <https://naturalspublishing.com/files/published/k8w7a636gpd97.pdf>
- Murray, R. & Spiegel, Larry (2001). *Estadística*. Editorial: McGraw Hill, (3ra ed., p. 159). México.
- Newbold, P. (1998), *Estadística para los Negocios y la Economía*. Editorial: Prentice Hall, (3ra. ed. p. 138). Madrid – España.
- Ostle, B., (1979). *Estadística Aplicada*. (1ra ed., p. 57). Editorial: Limusa. México D.F. – México.
- Palacios, S. (1998). *Estadística Aplicada, Ciencias & Ingeniería*. Editorial: Educación y Cultura, (1ª ed., p. 34).

Cochabamba – Bolivia.

[en-base-a-confiabilidad.pdf?sequence=1&isAllowed=y](#)

Ruiz, G . (1970 - 2022). *Librería Científica de Programas Informáticos*, Oruro, Santa Cruz, La Paz -Bolivia.

Sasieni, M.; Yaspan, A.; Friedman, L., (1967) *Investigación de Operaciones*. Editorial Limusa - Wiley S.A., (1ra ed. p. 117). México D.F. – México.

Valenzuela, M. (2020). *Planificación de mantenimiento preventivo en máquina papelera en base a confiabilidad*. (1ª ed., p. 9 - 15). Universidad de Chile. Recuperado el 25 de agosto de 2022, de <https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/179185/Planificacion-de-mantenimiento-preventivo-en-maquina-papelera>

COMPARACIÓN DEL GRADO DE SATISFACCIÓN DE LOS ESTUDIANTES RESPECTO A LA MODALIDAD DE CLASES VIRTUALES POR FACTORES SOCIO ECONÓMICOS.

COMPARISON OF THE DEGREE OF STUDENT SATISFACTION REGARDING THE VIRTUAL CLASS MODALITY BY SOCIO-ECONOMIC FACTORS.

Carmen Vega Flores¹

Carrera de Ingeniería de Sistemas, Universidad Pública de El Alto, El Alto-Bolivia

✉ vegaflorescarmen@gmail.com

Dindo Valdez Blanco²

Universidad Mayor de San Andrés, La Paz-Bolivia

✉ dvaldez@fcpn.edu.bo

Artículo recibido: 19-08-2022

Artículo aceptado: 24-09-2022

RESUMEN

El presente artículo tiene por objetivo principal, comparar el grado de satisfacción de los estudiantes de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UPEA respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos en su proceso de aprendizaje a consecuencia de la suspensión de actividades académicas de las clases presenciales como efecto del virus COVID-19. El estudio es de tipo descriptivo con diseño no experimental de corte transversal con enfoque cuantitativo, los resultados obtenidos muestran a 32 ítems, definidos en dos variables: Satisfacción del estudiante y Modalidad de clase. Como resultados se tiene; en general el grado de satisfacción en la mayoría de los estudiantes se sitúa en la categoría medio (>50%), el grado de satisfacción es más alto en los estudiantes que pasan las clases en su domicilio propio, se puede señalar también sobre el tipo de financiamiento de la conexión a internet, la satisfacción es más alta en los estudiantes que son financiados por un tercero (padre, tutor u otro) en relación los que pagan por cuenta propia o tienen un pago compartido, asimismo, los estudiantes que tiene un dispositivo propio para pasar las clases virtuales son los que tienen un grado de satisfacción más alto y no así los que disponen de dispositivos compartidos. En conclusión, la investigación permite comparar el nivel de satisfacción por factores socio económicos.

Palabras clave: Educación virtual, nivel de satisfacción del estudiante, clase online.

ABSTRACT

The main objective of this article is to compare the degree of satisfaction of the students of the Systems Engineering career of the UPEA with respect to the modality of virtual classes due to socio-economic factors in their learning process as a result of the suspension of academic activities. of face-to-face classes as an effect of the COVID-19 virus. The study is of a descriptive type with a non-experimental cross-sectional design with a quantitative approach, the results obtained show 32 items, defined in two variables: Student satisfaction and Class modality. As a result you have; In general, the degree of satisfaction in the majority of the students is in the medium category (>50%), the degree of satisfaction is higher in the students who take the classes in their own home, it can also be pointed out about the type of financing the Internet connection, satisfaction is higher in students who are financed by a third

¹ Maestría en Investigación Científica, Licenciada en Estadística. Docente de Estadística – Universidad Pública de El Alto, Carrera de Ingeniería de Sistemas. ORCID: 0000-0003-1430-2854

² Maestría en Ciencias Estadísticas, Licenciado en Estadística. Profesor de Estadística - Universidad Mayor de San Andrés. ORCID: 0000-0003-0704-0980

party (parent, guardian or other) in relation to those who pay on their own or have a shared payment, they showed, students who have a Own device to pass the virtual classes are those who have a higher degree of satisfaction and not so those who have shared devices. In conclusion, the research allows us to compare the level of satisfaction by socioeconomic factors.

Key words: Virtual education, level of student satisfaction, online class.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, el Sistema Universitario Boliviano mantiene las clases virtuales en algunas carreras y cursos a causa de la pandemia provocado por el virus COVID-19, debido a esta enfermedad como una primera medida de seguridad en el primer semestre del 2020, se prohibieron las reuniones masivas siendo este uno de los principales riesgos de contagio, además de la propagación de dicha enfermedad.

Como consecuencia de este mal una gran mayoría de las universidades a nivel mundial dejaron de operar presencialmente, según estimaciones de la UNESCO y el Instituto Internacional para la Educación Superior de América Latina y el Caribe (IESALC), muestran que: el cierre temporal afectó aproximadamente a unos 23,4 millones de estudiantes de educación superior y a 1,4 millones de docentes en América Latina y el Caribe; esto representó, aproximadamente a más del 98% de la población de estudiantes y profesores de educación superior de la región (IESALC, 2020).

Es en esta situación que el internet es una herramienta primordial que permite realizar clases virtuales, a partir del uso de esta, existe una variedad de herramientas digitales que facilitan la enseñanza docente, no obstante, las herramientas digitales no reemplazan al docente, pero son un complemento esencial en todo este proceso de enseñanza y aprendizaje, bajo estas circunstancias es necesario su uso a fin de que, los alumnos continúen su proceso de aprendizaje y formación profesional.

La carrera de Ingeniería de Sistemas perteneciente a la Universidad Pública de El Alto (UPEA), por medio del Honorable Consejo Universitario (HCU) decide dar continuidad a las actividades académicas por medio de la modalidad de clase virtual. La UPEA en la actualidad dispone de un servidor Web que permite habilitar la plataforma Moodle así también proporciona la sostenibilidad de los cursos y materiales virtuales de las diferentes asignaturas, dado que la carrera hasta el día de hoy no cuenta con su propia plataforma, la universidad se encarga de adecuar la plataforma para que la carrera de Sistemas pueda proseguir con la formación académica estudiantil, de esta manera, los alumnos pueden acceder, revisar los recursos y actividades que los docentes transmiten y, por consiguiente, ellos pueden disponer de todo el material para su correspondiente retroalimentación. Durante el semestre I – 2022 las clases continuaron de forma virtual, sin embargo, este semestre II – 2022 aún no se ha restablecido las clases presenciales en todas las carreras debido a la quinta ola, definitivamente habrá un antes y un después de la pandemia en nuestro sistema educativo a nivel superior.

En vista de todo lo expuesto, es importante comparar el grado de satisfacción de los estudiantes de la carrera de Ingeniería de Sistemas respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos, los resultados obtenidos permitirá mostrar el nivel de satisfacción considerando los siguientes factores como ser: lugar donde pasan sus clases virtuales, tipo de conexión a internet, tipo de financiamiento de conexión

Comparación del grado de satisfacción de los estudiantes respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos

a internet además de examinar el tipo de dispositivo que utiliza para asistir a sus clases online.

De esta manera se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el grado de satisfacción de los estudiantes de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UPEA en la modalidad de clase virtual por factores socio económicos?

Menciona Gros (2011), en términos de aprendizaje en línea, las deficiencias de los productos se comparten, pero la atención se centra en el uso de la web como un medio para acceder a los contenidos y actividades de formación. La interacción y la comunicación son partes integrales de los productos de e-learning. (p.13)

La “formación virtual” desde varias perspectivas. Por ejemplo, el término e-learning (enseñanza/aprendizaje virtual) constituye uno de los términos más extendidos. El prefijo “e” como sucede con “e-business”, “e-commerce”, “e-service”, etc., nos da a entender que se trata de algo electrónico que tiene cabida en internet. Podríamos por tanto considerar que la formación virtual, como las demás e-terminologías, nacen como un resultado de diseñar y aplicar las nuevas tecnologías de información y comunicación, enfocado de la enseñanza/aprendizaje como una alternativa más de formación virtual (Rivero, 2004).

Sánchez (2018) expresa que, satisfacción estudiantil, es la percepción cognitiva y emocional del estudiante frente a las características del servicio educativo que le permite lograr sus metas, intereses y expectativas y a la vez solucionar sus necesidades y encontrar respuesta a sus deseos razonables. (p.24)

Enache (2011) citado por (Sánchez, 2018)

manifiestan sobre la importancia de la satisfacción estudiantil; A medida que el estudiante llegó a ser cada vez más importante, nuevos estudios están tratando de entender cómo es el comportamiento de los estudiantes, cuáles son las demandas de los estudiantes y cómo puede una universidad lograr la satisfacción de los estudiantes. (p. 27)

Medir la satisfacción de un estudiante universitario ayuda mucho a mejorar la calidad del conocimiento proporcionado al mismo tiempo que se evalúan los factores académicos y administrativos que lo afectan y se toman las decisiones correctas para mejorarlo. Asimismo, la satisfacción del estudiante contribuye al éxito académico, la longevidad de la escuela y la creación de un vocabulario efectivo que enriquece el nombre, la reputación y la existencia de la universidad (Sánchez, 2018).

El objetivo de esta investigación se concentra en, comparar el grado de satisfacción de los estudiantes de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UPEA respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Diseño de la investigación

La presente investigación tiene paradigma positivista, el paradigma positivista busca la realidad de las investigaciones, de modo que, el único conocimiento admitido es el científico, (Martínez, 2013). El enfoque de la investigación es cuantitativo, adecuado para sistemas numéricos además del uso de técnicas estadísticas basadas en el análisis numérico (Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., Valencia, S. M., & Torres, C. P. M., 2014). El estudio presenta una investigación de tipo descriptivo, ya que explica y describe

las estructuras y características de enseñanza de la modalidad de clase virtual además de la satisfacción del estudiante (Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., Valencia, S. M., & Torres, C. P. M., 2014). El diseño es no experimental transeccional o trasversal debido a que se obtuvo la información en un solo momento.

El instrumento de recolección de información es la encuesta de elaboración propia en escala Likert, la información fue recolectada en la gestión II-2021 mediante la herramienta Google Forms. Para medir la confiabilidad del instrumento se utilizó el estadístico de fiabilidad Alfa de Cronbach dando un resultado del 0.965 lo que significa que el instrumento tiene un nivel excelente de confiabilidad. La validación del instrumento se basa en una prueba piloto del mismo a través de la correlación de Spearman, que es un 92.3%, que indica una validez buena del instrumento.

Variables de estudio

Las variables definidas para la presente investigación son las siguientes:

Variable 1: Satisfacción del estudiante, tomando en cuenta 18 ítems en escala de Likert del cuestionario con el objetivo de definir la variable 1 en 4 dimensiones siguientes: Calidad del servicio de internet, Expectativa del estudiante, Docencia y Rendimiento, de tal forma que sean medibles.

Variable 2: Modalidad de clase virtual. tomando en cuenta 14 ítems en escala de Likert del cuestionario con el objetivo de definir la variable 2 en las dimensiones medibles siguientes: Recursos de aprendizaje virtual, Comunicación Virtual y Competencias.

Población y muestra

La carrera de Ingeniería de Sistemas de la UPEA, cuenta con una población estudiantil de 3500 estudiantes matriculados durante la gestión II-2020.

El tipo de muestro empleado en la investigación es el muestreo probabilístico, por lo cual la muestra estuvo conformada por 381 alumnos de ambos sexos donde, el 55.9% de los encuestados son hombres y 44.1% son mujeres, así también 22.3% de los estudiantes son de cuarto semestre, 18.4% de los estudiantes están cursando el tercer semestre, 28.1% son de primer semestre que corresponde al mayor porcentaje de estudiantes entrevistados en la muestra, 0.5% de los encuestados son de octavo y décimo semestre, además de edades comprendidas entre 16 a 41 años. La selección de la muestra fue aleatoria entre los estudiantes de la Carrera de Ingeniería de Sistemas de la UPEA. El cálculo del tamaño de muestra para esta investigación considera a un nivel de confianza del 95% y un error máximo de estimación del 5%.

3. RESULTADOS

Se presentan los resultados principales de la investigación: la Tabla 1 considera tomando en cuenta a la variable 1 resultados reflejan que los estudiantes no están satisfechos por el lugar donde acceden a sus clases virtuales sobre todo si el lugar no es propio, en el caso de la variable 2, al igual que la anterior variable los resultados son similares, el grado de satisfacción es alto (34,40%) cuando el estudiante asiste a sus clases virtuales en su domicilio propio. De igual forma se observa que la mayoría de los estudiantes se encuentra medianamente satisfecho con la modalidad de clase virtual.

Comparación del grado de satisfacción de los estudiantes respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos

Tabla 1

Tabla de contingencia. Evaluación de la variable 1 y 2 con relación al lugar donde pasa clases virtuales

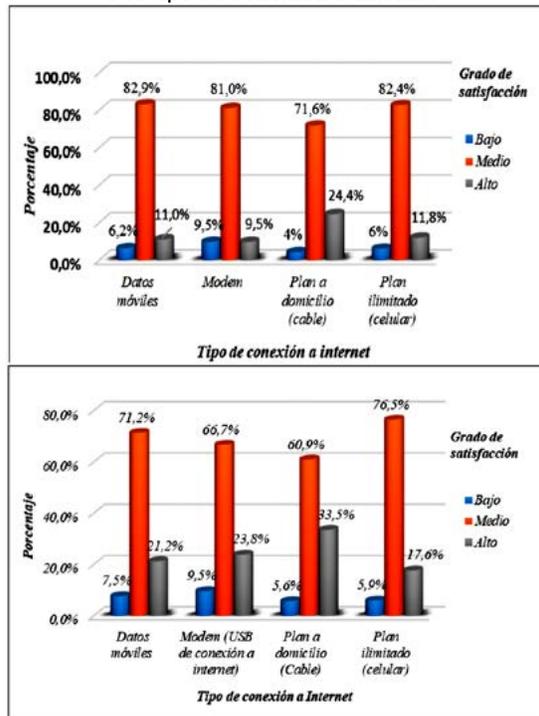
	Lugar donde pasa clases virtuales	Grado de satisfacción			Total
		Bajo	Medio	Alto	
Variable 1. Satisfacción del estudiante	Asiste a un local de internet	10,50%	84,20%	5,30%	100,00%
	Domicilio de un familiar	3,90%	86,30%	9,80%	100,00%
	Domicilio de un tercero (vecino o conocido)	28,60%	57,10%	14,30%	100,00%
	Domicilio propio	3,40%	76,20%	20,30%	100,00%
	Total	5,20%	76,90%	17,80%	100,00%
Variable 2. Modalidad de clase virtual	En qué lugar pasas las clases virtuales	Grado de satisfacción			Total
		Bajo	Medio	Alto	
	Asiste a un local de internet	26,30%	68,40%	5,30%	100,00%
	Domicilio de un familiar	3,90%	78,40%	17,60%	100,00%
	Domicilio de un tercero (vecino o conocido)	23,80%	57,10%	19,00%	100,00%
Domicilio propio	4,50%	64,10%	31,40%	100,00%	
Total	6,60%	65,90%	27,60%	100,00%	

Fuente. Elaboración propia

La Figura 1 toma en cuenta lo siguiente, ambas variables presentan un grado de satisfacción alto (24.4% y 33.5%) al plan a domicilio como tipo de conexión a Internet.

Figura 1

Evaluación de la variable 1 y 2.
Por tipo de conexión a Internet



Fuente. Elaboración propia

Con relación a la Tabla 4, sobre el tipo de financiamiento a Internet los estudiantes que cuentan con el apoyo por un tercero (padre, tutores u otros) tiene un nivel alto (21.60% y 34.50%)

Tabla 2

Tabla de contingencia. Evaluación de las variables 1 y 2 por tipo de financiamiento a Internet

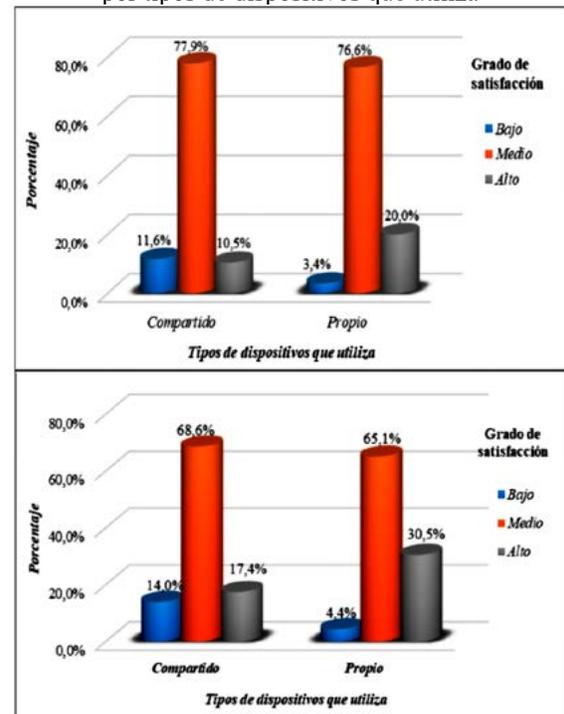
	Financiamiento de conexión a internet	Grado de satisfacción			Total
		Bajo	Medio	Alto	
Variable 1. Satisfacción del estudiante	Pago compartido	4,60%	78,50%	16,90%	100,00%
	Por cuenta propia	6,20%	80,00%	13,80%	100,00%
	Por un tercero (padres, tutores, otras)	4,70%	73,70%	21,60%	100,00%
	Total	5,20%	76,90%	17,80%	100,00%
Variable 2. Modalidad de clase virtual	Financiamiento de conexión a Internet	Grado de satisfacción			Total
		Bajo	Medio	Alto	
	Pago compartido	6,20%	69,20%	24,60%	100,00%
	Por cuenta propia	8,30%	71,00%	20,70%	100,00%
Por un tercero (padres, tutores, otras)	5,30%	60,20%	34,50%	100,00%	
Total	6,60%	65,90%	27,60%	100,00%	

Fuente. Elaboración propia

Acorde con la Figura 2 se observa que, los estudiantes indican, cuando se encuentran cursando sus clases en línea, prefieren utilizar dispositivos propios, que representa un grado alto 21,60%, 34.50% respectivamente por cada variable de estudio. En la tabla 2 se puede apreciar que en general el grado de satisfacción de los estudiantes se sitúa en la categoría medio, por lo que están medianamente satisfechos.

Figura 2

Evaluación de las variables 1 y 2
por tipos de dispositivos que utiliza



Fuente. Elaboración propia

Con el propósito de determinar la significancia de la dependencia del grado de satisfacción de la enseñanza en la modalidad virtual en relación al método de enseñanza tradicional se considera en la Tabla 3 las variables para el respectivo análisis.

Tabla 3

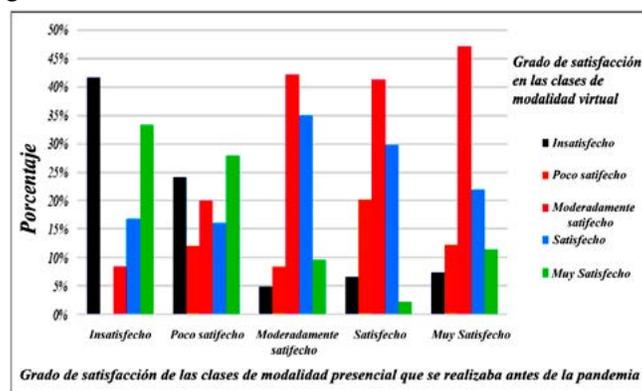
Tabla de contingencia del grado de satisfacción en el desarrollo de las clases presenciales antes de la pandemia y el grado de satisfacción de las clases en la modalidad virtual

Grado de satisfacción en el desarrollo de las clases de modalidad virtual	Grado de satisfacción del desarrollo de las clases de modalidad presencial que se realizaba antes de la pandemia.					Total
	Insatisfecho	Poco satisfecho	Moderadamente satisfecho	Satisfecho	Muy satisfecho	
Insatisfecho	5 41.7%	6 24.0%	4 4.8%	9 6.5%	9 7.3%	33 8.7%
Poco satisfecho	0 0.0%	3 12.0%	7 8.4%	28 20.3%	15 12.2%	53 13.9%
Moderadamente satisfecho	1 8.3%	5 20.0%	35 42.2%	57 41.3%	58 47.2%	156 40.9%
Satisfecho	2 16.7%	4 16.0%	29 34.9%	41 29.7%	27 22.0%	103 27.0%
Muy satisfecho	4 33.3%	7 28.0%	8 9.6%	3 2.2%	14 11.4%	36 9.4%
Total	12 100.0%	25 100.0%	83 100.0%	138 100.0%	123 100.0%	381 100.0%

Fuente. Elaboración propia

Figura 3

Grado de satisfacción de las clases presenciales versus el grado de satisfacción de las clases virtuales



Fuente. Elaboración propia

4. DISCUSIÓN

Realizar la comparación de la satisfacción por factores socioeconómicos permite estudiar cuan conformes se encuentran los estudiantes con relación a la conexión de internet, por el tipo de financiamiento a la red de internet, el lugar donde accede a sus clases virtuales además del tipo de dispositivo que utiliza, por investigaciones anteriores, muestran que en la muestra estudiada un porcentaje relativamente alto no cuenta con conexión a internet en sus domicilios así también,

se ve lo siguiente; una gran mayoría de los estudiantes utilizan un celular para el acceso a internet (Huanca, 2018), por lo consiguiente el acceso a internet es una limitación en nuestra comunidad estudiantil y un limitante para dar una continuidad fluida a la modalidad de clase virtual puesto que como causa se deba al costo elevado y asimismo a la baja cobertura de la web.

Los resultados de la presente investigación de forma similar con el estudio mencionado (Huanca, 2018) reflejan algo similar en

Comparación del grado de satisfacción de los estudiantes respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos

sus conclusiones en relación a factores socioeconómicos, ambos estudios consideran que dichos factores son preponderantes con la satisfacción de los estudiantes a la modalidad de clase virtual.

5. CONCLUSIONES

La investigación realiza principalmente la comparación de la satisfacción por factores socioeconómicos, el grado de satisfacción es más alto en los estudiantes que pasan las clases en su domicilio propio (20.3%) en comparación con los estudiantes que pasan clases en domicilio de terceros o en algún local de internet, también es más alto en los estudiantes que tienen una conexión a internet fijo con un plan a domicilio (24.4%) y no así en los casos con conexiones de datos móviles o por modem.

De acuerdo al tipo de financiamiento de la conexión a internet, la satisfacción es más alta en los estudiantes que son financiados por un tercero (padre, tutor u otro) en relación los que pagan por cuenta propia o tienen un pago compartido. Los estudiantes que tienen un dispositivo electrónico propio para pasar las clases virtuales son los que tienen un grado de satisfacción más alto (20%) y no así los que disponen de dispositivos compartidos.

El grado de satisfacción de los estudiantes en su mayoría (>50%) se sitúa en la categoría “medio” en cada uno de los ítems considerados, lo que permite concluir que los estudiantes se encuentran medianamente satisfechos con las clases llevadas a cabo bajo la modalidad virtual.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Adnan, M., Kainat, A. (2020). Online learning amid the COVID-19 pandemic: Students' perspectives. *Journal of Pedagogical Sociology and Psychology*, 2(1), 45-51. <http://www.doi.org/10.33902/JPSP.%202020261309>
- Álvarez, J., Chaparro, E. y Reyes, D. (2015). Estudio de la satisfacción de los estudiantes con los servicios educativos brindados por instituciones de educación superior del Valle de Toluca. *REICE. Revista Iberoamericana sobre la Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación*. 13(2), 5-26. <https://www.redalyc.org/pdf/551/55138743001.pdf>
- Basilaia, G., Kvavadze, D. (2020). Transition to online education in schools during a SARS-CoV-2 coronavirus (Covid-19) pandemic in Georgia. *Pedagogical Research*, 5(4), 1-9. <https://doi.org/10.29333/pr/7937>
- Bonilla, L. A. (2016). Deliberación entorno a la Educación Virtual. *Interconectando Saberes*, (1), 77-89. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_user=3F5cbRoAAAAJ&citation_for_view=3F5cbRoAAAAJ:Tyk-4Ss8FVUC
- Cid, A. D., Méndez, R., y Sandoval, F. (2011). *Investigación Fundamentos y Metodologías*. Pearson Educación. <https://mitrabajodegrado.files.wordpress.com/2014/11/cid-investigacion-fundamentos-y-metodologia.pdf>
- Duran, R., (2015). *La Educación Virtual Universitaria como medio para mejorar las competencias genéricas y los aprendizajes a*

- través de buenas prácticas docentes [Tesis]. <https://www.tesisenred.net/handle/10803/397710#page=1>
- García, L., (2001). *La educación distancia, De la teoría a la práctica*. Ariel S.A.
- Gonzales, M., Pino, M., y Penado, M. (2017). Estudio de la satisfacción percibida por los estudiantes de la UNED con su vida universitaria. RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 20(1), 243- 260. <http://dx.doi.org/10.5944/ried.20.1.16377>
- Goñi, E., y Infante, G. (2010a). Actividad físico-deportiva, autoconcepto físico y satisfacción con la vida. *European Journal of Education and Psychology*, 3(2), 199-208. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=129315468004>.
- Huanca, P., G., (2018). *Uso de las plataformas y su relación con el proceso educativo del primer y segundo año de la carrera de Ciencia de la educación de la UMSA en la gestión 2018*. [Tesis de grado, Universidad Mayor de San Andrés]. <https://repositorio.umsa.bo/bitstream/handle/123456789/23620/T-1335.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- IESALC (2020) *La Educación superior virtual en América Latina y El Caribe*. Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) (2020). *COVID-19 y educación superior: De los efectos inmediatos al día después*. América Latina y el Caribe. IESALC. <https://www.iesalc.unesco.org/wp-content/uploads/2020/05/COVID-19-ES-130520.pdf>
- Martínez, V. (2013). *Paradigmas de investigación: Manual multimedia para el desarrollo de trabajos de investigación*. https://pics.unison.mx/wp-content/uploads/2013/10/7_Paradigmas_de_investigacion_2013.pdf
- Murillo, F., Duk, C. (2020). El Covid-19 y las Brechas Educativas. *Revista latinoamericana de educación inclusiva*, 14(1), 11-13. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-73782020000100011>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (1998). *Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI: Visión y Acción y Marco de Acción Prioritaria para el Cambio y el Desarrollo de la Educación Superior aprobados por la Conferencia Mundial sobre la Educación Superior*. *La Educación Superior en el Siglo XXI: Visión y acción*. http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm.
- Rivero, A., (2004). *Un modelo de enseñanza – Aprendizaje Virtual: Análisis, Diseño y Aplicación en un Sistema Universitario Mexicano* [Tesis doctoral, Universidad Granada].
- Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., Valencia, S. M., & Torres, C. P. M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.
- Sánchez, Q., J. (2018). *Satisfacción estudiantil en educación superior: validez de su medición*. Universidad Sergio Arboleta. <https://repository.usergioarboleda.edu.co/bitstream/handle/11232/1027/SATISFACCI%20C3%93N%20ESTUDIANTIL>.

Comparación del grado de satisfacción de los estudiantes respecto a la modalidad de clases virtuales por factores socio económicos

- [pdf?sequence=4&isAllowed=y](#)
- Santoveña, S. (2002). Repercusión de la metodología didáctica con apoyo de entornos virtuales de aprendizaje en el rendimiento de los estudiantes. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 16(3), 409-430. <https://www.redalyc.org/pdf/567/56725002021.pdf>
- Silvio, J. (2006). Hacia una educación virtual de calidad, pero con equidad y pertinencia. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 3(1), 1-14. file:///C:/Users/PC/Downloads/73608-Text%20de%20l'article-85552-1-10-20070925%20(1).pdf
- Torres, C. A. B., Bernal, C. A., y Palma, O. F. (2010). *Metodología de la investigación*. Pearson Educación.
- Valdez, B, E. (2018) La educación virtual y la satisfacción del estudiante en los cursos virtuales del Instituto Nacional Materno Perinatal 2017. [Tesis] https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/21504/Valdez_BEB.pdf?sequence=1
- Zambrano, J. (2016). Factores predictores de la satisfacción de estudiantes de cursos virtuales. RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*. 19(2), 217-235. http://espacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:revistaRied-2016-19_5055/Factores_predictores_satisfaccion.pdf.

Política editorial de la revista Varianza

REVISTA VARIANZA

ISSN 2789-3510 versión impresa

ISSN 2789-3529 versión en línea

MISIÓN

La misión de la revista Varianza es publicar artículos de investigación e interacción social de originalidad y alta calidad que cubran diferentes áreas de la estadística teórica, aplicada y de estudios interdisciplinarios.

VISIÓN

La visión de la revista Varianza es convertirse en una publicación oficial de la ciencia en investigación científica en estadística con aplicación en diferentes campos del conocimiento humano con referencia nacional e internacional.

POLÍTICA EDITORIAL

La revista Varianza es una publicación internacional, periódica y de carácter electrónico. Fue presentada por primera vez el año 2001 por el Instituto de Estadística Teórica y Aplicada, IETA de la Carrera de Estadística de la UMSA.

El objetivo es contribuir al conocimiento sobre la enseñanza-aprendizaje de la estadística y establecer un foro permanente de discusión de ideas, conceptos, procedimientos y modelos concernientes al área estadística y sus aplicaciones.

El alcance de la revista es especializado en contribuciones de artículos del ámbito estadístico, y aplicaciones estadísticas.

A partir del 2021 esta revista se edita dos veces al año durante los meses de abril y octubre. Los trabajos publicados son producto de contribuciones originales y de alto rigor académico y científico, cuyo aporte son investigaciones de profundidad estadística teóricos y aplicados. Sin embargo, publica también temas selectos provenientes de disciplinas afines en estadística aplicada.

Se publican artículos en español donde el resumen y palabras clave deben ser escritos en español e inglés.

MODELO DE FINANCIAMIENTO

La revista tiene una asignación presupuestaria para su publicación impresa con recursos provenientes de la Universidad Mayor de San Andrés, bajo el presupuesto de la carrera de Estadística y el IETA (Instituto de Estadística Teórica y Aplicada). La publicación en la revista es gratuita bajo la modalidad Open Access.

PUBLICACIÓN

Los tipos de artículos que admite la revista son:

- Originales,

Política editorial de la revista Varianza

- Originales cortos,
- Reportes de caso,
- Artículos de revisión,
- Artículos de reflexión.

La aceptación de un artículo depende de la calidad, originalidad, rigor científico y ética de los escritos, mismos que son verificados mediante revisión de procesos ciegos de evaluación por pares. Las publicaciones son gratuitas y en ningún caso se cobrarán honorarios a los autores para la publicación de sus artículos.

La revista Varianza cuenta con registro ISSN 2789-3510 versión impresa; 2789-3529, versión en línea con depósito legal No. 4-1-285-2021 P.O. y sus artículos son presentados en formato APA. Asimismo, se encuentra indexada en Revistas Bolivianas (REVBOL).

PROCESO DE ARBITRAJE

El proceso inicial de revisión pasa por el Comité Editorial, que revisa los requisitos básicos así como los aspectos éticos para ser publicados en la revista Varianza. Esa revisión se realiza en un plazo de un mes. Al concluir el proceso, se notifica al autor o autores, vía correo electrónico.

La evaluación de los manuscritos se realiza con la ayuda de un formulario donde los evaluadores registran las observaciones y recomendaciones. Los evaluadores pueden aceptar o rechazar el artículo de manera definitiva o condicional dada la aclaración y/o rectificación de parte del autor. La comunicación con el autor es responsabilidad exclusiva del editor. Algunos aspectos que se toman en cuenta en la evaluación, son:

1. La originalidad e innovación en conceptos y técnicas estadísticas.
2. Si constituye una contribución en el área.
3. Su pertinencia y rigor científico.
4. Si los referentes teóricos y empíricos son apropiados.
5. Si hace un análisis bien fundamentado y está coherentemente argumentado.
6. Su aporte a la ciencia estadística y aplicaciones.
7. Se juzgará la calidad de la presentación, verificando si el resumen sintetiza el artículo en forma clara y adecuada.
8. Ajustes al formato en las normas APA.

La revisión de los artículos sigue un proceso bajo la modalidad de “doble ciego” con la participación de dos evaluadores con la especialidad requerida para realizar una apropiada evaluación. Esta revisión busca la originalidad e innovación de las publicaciones.

El Comité Editorial de la revista Varianza está conformado por un Consejo Editorial Nacional e Internacional cuya misión es la revisión de los artículos en la modalidad doble ciego.

ÉTICA DE PUBLICACIÓN

La revista Varianza tiene compromiso con la ética de la investigación, promueve los siguientes aspectos:

Política editorial de la revista Varianza

- Evitar conflictos de intereses,
- Evaluar objetivamente los manuscritos,
- Respetar los criterios de evaluación de los evaluadores,
- Conservar la confidencialidad de los autores y evaluadores, durante todo el proceso de revisión.

CONFLICTOS DE INTERESES

Para evitar conflictos de intereses en los procesos de evaluación de los manuscritos enviados, el Comité Editorial no selecciona como evaluadores a colegas que pertenezcan a la misma institución o a la misma red de investigación que los autores. Además, se solicita a los autores que declaren cualquier tipo de interés relacionado con algún miembro o miembros del Comité Editorial.

PRINCIPIOS ÉTICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Los manuscritos recibidos son evaluados mediante el sistema de doble ciego, para evitar posible pérdida de objetividad por parte de los árbitros. Por otro lado, el Comité Editorial, se reserva el derecho de pasar por un detector de plagio los manuscritos recibidos, a fin de identificar faltas éticas.

Cuando se detecta alguna violación a los principios éticos de la investigación, no se publica el artículo y el Comité Editorial informa las razones al autor o autores.

PROPIEDAD INTELECTUAL

Los autores al momento de tener la aceptación de la publicación, deben firmar la autorización de la publicación de la revista Varianza, en la que se estipula que son legítimos propietarios del artículo a publicar, que es una contribución original y que no existe problemas de derechos de autor con terceros y/u otros conflictos de naturaleza ética. Todo el contenido de la revista, excepto aquello que expresamente sea identificado, está bajo la licencia *Creative Commons*.

LICENCIAMIENTO

La revista Varianza se encuentra bajo licenciamiento *Creative Commons* atribución CC BY <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.



Atribución CC BY

La licencia permite que otros distribuyan, mezclen, adapten y construyan sobre su trabajo, incluso comercialmente, siempre que le reconozcan la creación original. Esta es la licencia más complaciente que se ofrece. Recomendado para la máxima difusión y uso de materiales con licencia.

INSTRUCCIONES PARA LOS AUTORES

Título

El título debe ser conciso e informativo de la investigación en mayúscula con no más de 12 palabras que contengan ya los descriptores, además debe ser redactado en sentido afirmativo, en idioma español e inglés.

Autoría

Debe ir a continuación del título, señalar el nombre y apellidos del (los) autor(es) acompañado(s) de la(s) nota(s) a pie de página, según sea la posición en la autoría. Debajo del nombre se indica la afiliación institucional. A pie de página y con la numeración correspondiente se debe informar: profesión y un breve curriculum vitae.

Resumen

El resumen debe contener el objetivo, metodología, material, métodos, resultados de la investigación haciendo énfasis en los logros alcanzados.

Palabras claves

Sirven para identificar el artículo en bases de datos internacionales de manera que un potencial usuario pueda llegar en forma efectiva al artículo. Van debajo del resumen, mínimo cuatro (4) y máximo siete (7) palabras clave que no deben hacer parte del título del artículo. Deben estar ordenadas alfabéticamente y separadas por comas que ayuden a identificar los aspectos importantes del artículo.

Abstract

Se escribe el resumen del artículo en inglés.

Key words

Se escriben las palabras clave en inglés.

Introducción

La introducción debe contener:

- **Problema:** Debe describir claramente lo que se resolverá con la investigación. Debe enunciar claramente el qué y el porqué de la investigación. Se debe desarrollar en uno o dos párrafos iniciales.
- **Revisión de la literatura:** Expone el marco referencial que da sustento al trabajo de investigación. A través de las citas se provee reconocimiento de estudios anteriores que se relacionan específicamente con el trabajo.
- **Objetivo o hipótesis:** Debe describir el objetivo en forma clara, debe indicar en forma inequívoca qué es lo que el investigador intenta observar y medir, redactados en forma afirmativa y sujetos a una sola interpretación. La hipótesis debe expresar de manera clara,

Política editorial de la revista Varianza

precisa y concisa una relación o diferencia entre dos o más variables, incluyendo, si corresponde, las variables del estudio y su efecto.

Materiales y métodos

Debe describir el universo de estudio, instrumentos y procedimientos con la precisión necesaria para permitir a los lectores una comprensión clara del artículo y la posibilidad de reproducir lo entendido. Debe especificarse el número de observaciones de los objetos a estudiar, los métodos y técnicas estadísticas para la generación y análisis de resultados.

Resultados

Presentarlos en secuencia lógica y que cuenten con un análisis estadístico o interpretativo en relación con el objetivo del estudio.

Discusión

La discusión debe ser sobre la base de los objetivos y los resultados para posteriormente comparar con el marco referencial. Discutir los aspectos nuevos y limitaciones que tiene su estudio, enunciando proyecciones o nuevas hipótesis si corresponde.

Conclusiones

Estas deben responder a los objetivos del estudio, limitándose a los datos encontrados sin citar referencias.

Referencias Bibliográficas

Contiene la referencia de libros y artículos consultados para el artículo científico. Las fuentes bibliográficas deben ser citadas a lo largo del texto, en formato APA.

Presentación

Los artículos deben ser presentados en doble columna, letra *Times New Roman* tamaño 12, espacio simple, los márgenes externos son: margen izquierdo 2,5 cm., derecho 2,0 cm., superior e inferior 2,0 cm.

