

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN DE CAMBIOS DE PRECIOS MENSUALES DEL ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR DE BOLIVIA

Mgtr. Iván Yony Aliaga Casceres* & Dr.(c) Omar Chocotea Poca**

✉ iyaliaga@umsa.bo, powervan@gmail.com

✉ ochocotea@umsa.bo

RESUMEN

La presente investigación estima los parámetros de localización, asimetría y los grados de libertad de una distribución tipo G mediante un método de estimación de libre verosimilitud Bayesiana comparada con el clásico método Metropolis Hastings, utilizando para ello datos de la distribución de la variación mensual del Índice de Precios al Consumidor del Instituto Nacional de Bolivia, periodo ene-1986 a oct-2020, base 2016. Se evidenció que el proceso iterativo algorítmico para el método Metropolis Hastings es más eficiente, sin embargo, el mejor ajuste se encontró con el método ABC-GIBBS.

PALABRAS CLAVE

Análisis Bayesiano, Estimación de libre verosimilitud, Distribución tipo G.

ABSTRACT

The present investigation estimates the location parameters, asymmetry and the degrees of freedom of a G-type distribution using a Bayesian free likelihood estimation method compared to the classic Hastings Metropolis method, using data from the distribution of the monthly variation of the Index of Consumer Prices of the National Institute of Bolivia, period Jan-1986 to Oct-2020, base 2016. It was evidenced that the algorithmic iterative process for the Metropolis Hastings method is more efficient, however, the best fit was found with the ABC method -GIBBS.

KEYWORDS

Bayesian analysis, Free likelihood estimation, Type G distribution.

1. INTRODUCCIÓN

La familia de distribución tipo G fue estudiada por Marcus (1987), Andrews et al. (1974), y Rosinski (1991), es el producto entre dos variables aleatorias independientes, la primera con distribución Normal con varianza constante y la segunda con una determinada distribución de probabilidad cuyo espacio soporte está definido en los reales positivos.

La estimación de los parámetros de la familia de distribuciones tipo G es una tarea tediosa, el problema radica en la función de verosimilitud, los métodos de optimización

estándar fallan al estimar todos los parámetros y el costo computacional es bastante alto, Barndorff et al. (1981), Andrews et al. (1974).

Bajo un enfoque Bayesiano, un parámetro es visto como una variable aleatoria a la que antes de extraer alguna evidencia muestral, se le asigna una distribución previa, con base a un cierto grado de creencia con respecto al comportamiento aleatorio, cuando se obtiene la evidencia muestral surge una actualización en base a la distribución previa y la evidencia muestral, de esta manera se obtiene una nueva distribución llamada distribución posterior.

Existen varios métodos en el ámbito

* Carrera de Estadística, Universidad Mayor de San Andrés

** Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Estimación de los parámetros de la distribución de cambios de precios mensuales del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia

Bayesiano que aproximan la distribución posterior, en este aspecto se presenta los llamados *métodos de verosimilitud libre*, Rubin (1984), Diggle et al. (1984), Tavaré et al. (1997), Beaumont et al. (2002), Ratmann et al. (2009), que aproximan de forma iterativa a la distribución posterior teórica resultante.

El término *Cálculo Bayesiano Aproximado* (ABC) fue establecido por los autores: Beaumont et al. (2002), quienes amplían aún más la metodología de los métodos de verosimilitud libre. El ABC es una técnica de aproximación a la distribución posterior de los parámetros de manera iterativa cuando la misma no tiene una función de verosimilitud explícita. Existen diferentes métodos de verosimilitud libre propuestos por diferentes autores: ABC-MCMC, Marjoram et al. (2003), ABC-GIBBS, Turner et al. (2012), Turner & Sederberg (2014). Este último es utilizado en esta investigación.

Los métodos: Metropolis Hastings, Hastings (1970), y ABC-GIBBS, Turner et al. (2012), Turner & Sederberg (2014), son aplicados en la estimación de los parámetros de la distribución de cambios de precios mensuales del Índice de Precios al consumidor de Bolivia desde ene-1986 hasta oct-2020, distribución teórica que presenta asimetría y leptocurtosis, Blattberg et al. (1974), Kyprianou (2014).

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Enfoque Bayesiano

Definición 2.1 Teorema de Bayes. Sean X y θ variables aleatorias con función de probabilidad $f(x|\theta)$ y $\pi(\theta)$, entonces la distribución posterior está dada por:

$$\pi(\theta|X) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

donde θ vector de parámetros y Θ espacio paramétrico.

Para aproximar $\pi(\theta|X)$ se recurre a una serie de métodos aproximados iterativos.

2.2. Método Metropolis Hastings

Este método es una generalización del método Hastings, Metropolis et al. (1953), utiliza una función de densidad propuesta que depende del estado actual de $\theta^{(i)}$. La función de densidad $q(\theta^*|\theta^{(i)})$ puede ser tan simple como una función de densidad Normal localizada en $\theta^{(i)}$.

Algoritmo 1 Algoritmo Metropolis-Hastings

Entrada: Dar un valor inicial para $\theta^{(0)}$, con $\pi(\theta|X)$ función objetivo.

Salida: Distribución posterior de θ : $\pi(\theta|X)$.

- 1: para $j = 1, 2 \dots$ hacer
- 2: Generar $\theta^* \sim q(\theta|\theta^{(j)})$
- 3: Calcular la probabilidad de aceptación.

$$\alpha(\theta^*, \theta^{(j)}) = \min \left\{ 1, \frac{f(\theta^*) q(\theta^{(j)}|\theta^*)}{f(\theta^{(j)}) q(\theta^*|\theta^{(j)})} \right\}.$$

- 4: Generar un número aleatorio $u \sim U(0, 1)$.
 - 5: si $u \leq \alpha(\theta^*, \theta^{(j)})$ entonces
 - 6: Aceptar θ^*
 - 7: devolver $\theta^{(j+1)} = \theta^*$
 - 8: si no
 - 9: Rechazar θ^*
 - 10: devolver $\theta^{(j+1)} = \theta^{(j)}$
 - 11: fin si
 - 12: fin para
-

2.3. Método ABC-GIBBS

El Algoritmo ABC-GIBBS fue propuesto por Turner & Zandt (2014), los autores proponen extraer muestras aleatorias directamente de la distribución posterior condicional de los hiperparámetros¹ que no dependan de la función de verosimilitud utilizando el método de Gibbs, Voss (2013), Beaumont et al. (2002), Marjoram et al. (2003), Ratmann et al. (2009), Sisson et al. (2007), Turner &

¹ Los hiperparámetros son parámetros de una distribución previa

Zandt (2014), Gelman et al. (2013).

Definición 2.2 Sea $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ el vector de parámetros, bajo un nivel de jerarquía de estos parámetros se tiene la siguiente notación para los hiperparámetros, de cada j -ésimo parámetro.

$$\xi = (\theta_{11}^+, \dots, \theta_{1m}^+, \theta_{21}^+, \dots, \theta_{2m}^+, \dots, \theta_{p1}^+, \dots, \theta_{pm}^+) \quad (1)$$

$m = 1, 2, 3, \dots \quad j = 1, 2, \dots, p.$

Ambos vectores pueden representarse como:

$$\eta = (\xi, \theta) = (\theta_{11}^+, \dots, \theta_{1m}^+, \theta_{21}^+, \dots, \theta_{2m}^+, \dots, \theta_{p1}^+, \dots, \theta_{pm}^+, \theta_1, \dots, \theta_p) \quad (2)$$

El vector de hiperparámetros y parámetros sin un elemento k -ésimo y j -ésimo respectivamente se denota por:

$$\begin{aligned} \xi_{-k} &= (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_M), \quad M = m * p. \\ \theta_{-j} &= (\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_p). \end{aligned} \quad (3)$$

Utilizando el muestreo de Gibbs para obtener un gran número de muestras de 3 y es denotado por:

$$\xi_k \sim \pi(\xi | \xi_{-k}, \theta), \theta_j \sim \pi(\theta | \theta_{-j}, \xi), j = 1, \dots, p \quad (4)$$

La implementación del método ABC-GIBBS se realiza en dos etapas, la primera etapa consiste de hallar la distribución condicional posterior de los hiperparámetros, tomando en cuenta que ξ influye a X solo a través de θ , la distribución condicional posterior de ξ no depende de la verosimilitud $\pi(X, Z | \theta, \xi)$ ya que es constante respecto a ξ .

$$\begin{aligned} \pi(\xi | X, Z, \theta) &\propto \pi(X | Z, \theta, \xi) \pi(Z | \theta, \xi) \pi(\theta | \xi) \pi(\xi) \\ &\propto \pi(X, Z | \theta, \xi) \pi(\theta | \xi) \pi(\xi) \\ &\propto \pi(\theta | \xi) \pi(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

En la segunda etapa del método ABC-GIBBS comprende en hallar la distribución posterior de los parámetros, y debe tomarse en cuenta la dependencia condicional de θ y X , la densidad del parámetro ξ es constante con respecto a θ .

$$\begin{aligned} \pi(\theta | X, Z, \xi) &\propto \pi(X | Z, \theta, \xi) \pi(Z | \theta, \xi) \pi(\theta | \xi) \\ &\propto \pi(X, Z | \theta, \xi) \pi(\theta | \xi) \\ &\propto L(\theta, \xi | X, Z) \pi(\theta | \xi) \end{aligned} \quad (6)$$

Algoritmo 2 Algoritmo ABC-GIBBS

Entrada: Inicialización para $\theta_{0,j}, \xi_{0k}, j = 1, \dots, p; k = 1, \dots, M$ y Z_0 , datos $X \in \mathbb{R}^n$.
Salida: Distribución posterior de $\theta: \pi(\theta | X, Z, \xi)$.

```

1: para  $i = 1, 2, \dots$  hacer
2:   para  $j = 1, \dots, p; k = 1, 2, \dots, M$  hacer
3:     Generar  $\xi^*$  de  $\pi(\xi | \xi_{-k}, \theta)$ .
4:     Generar  $\theta^*$  de  $\pi(\theta | \theta_{-j}, \xi)$ .
5:   fin para
6:   para  $j = 1, \dots, p; k = 1, 2, \dots, M$  hacer
7:     Generar conjunto de datos  $X^* \sim f(X, Z_{i-1} | \theta^*, \xi^*)$ .
8:     Generar una variable aleatoria  $U \sim Unif(0, 1)$ 
9:     si  $\rho(S(X^*), S(X)) \leq \epsilon$  y  $U < \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^*) \pi(X^*, Z_{i-1} | \theta^*, \xi^*)}{\pi(\theta_{i-1,j}) \pi(X, Z_{i-1} | \theta_{i-1,j}, \xi^*)} \right\}$ 
entonces
10:      Generar  $Z_i$  de  $\pi(Z | \theta^*, \xi^*)$ .
11:      devolver  $(\theta_{i,j}, \xi_{i,j}) = (\theta^*, \xi^*)$ 
12:     si no
13:      devolver  $(\theta_{i,j}, \xi_{i,j}) = (\theta_{i-1,j}, \xi_{i-1,k})$ 
14:     fin si
15:   fin para
16: fin para
    
```

2.4. Distribuciones tipo G

Definición 2.3 Una variable aleatoria X con función de distribución de probabilidad F es infinitamente divisible (i.d.) si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ tal que.

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,n} \\ X_{n,j} &\stackrel{d}{=} X_n \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

donde X_n representa la variable aleatoria con distribución factor común.

Definición 2.4 Una variable aleatoria continua X tiene distribución de probabilidad tipo G , si está definida como:

Estimación de los parámetros de la distribución de cambios de precios mensuales del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia

$$X \stackrel{d}{=} \mu + \beta M + MW \quad (8)$$

donde M y W son variables aleatorias independientes, W tiene distribución normal con varianza constante, M es una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad con espacio soporte en los reales positivos y cumple la propiedad de infinita divisibilidad, el parámetro μ es el parámetro de localización, β es el parámetro de simetría o asimetría.

La variable aleatoria M tiene distribución Gaussiana Inversa Generalizada y cumple la propiedad infinita divisibilidad, Barndorff et al. (1977), Grosswald (1976).

2.5. Distribución Gaussiana Inversa Generalizada

Definición 2.5 Una variable aleatoria X tiene distribución Gaussiana Inversa Generalizada (GIG) con parámetros λ, δ, γ , si la función de densidad está dado por.

$$f_X(x) = \frac{(\delta/\gamma)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\gamma\delta})} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\delta x + \frac{\gamma}{x}\right)\right\}, \quad x > 0. \quad (9)$$

donde $K_\lambda(\cdot)$ es la función Bessel de tercer orden y $(\gamma, \delta) \in \Theta_\lambda$.

$$\Theta_\lambda = \begin{cases} \{(\gamma, \delta) : \gamma \geq 0, \delta > 0\}, & \text{Si } \lambda > 0 \\ \{(\gamma, \delta) : \gamma > 0, \delta > 0\}, & \text{Si } \lambda = 0 \\ \{(\gamma, \delta) : \gamma > 0, \delta \geq 0\}, & \text{Si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Proposición 2.1 Si $M \sim GIG(\lambda = -v/2, \delta, \gamma = v)$, $v > 0$ y $\delta \rightarrow 0^+$ entonces M tiene distribución Gamma Inversa con parámetros $(v/2, v/2)$.

Para obtener la distribución previa y la distribución posterior se identifica la función conjunta de X y M , Hichen (2006).

$$f(x|M) = (2\pi)^{-1/2} m^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2z}(x - (\mu + \beta m))^2\right\} \quad (10)$$

$$M \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$$

Realizando un cambio de variable en términos de a y b .

$$a = \frac{\delta}{\gamma}; \quad b = \gamma\delta; \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{\delta^2}; \quad ab = \delta^2; \quad \frac{b}{a} = \gamma^2 \quad (11)$$

Se tiene la siguiente la función previa bivalente con a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 hiperparámetros.

$$\pi(\mu, \beta) \sim N_2\left(m = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & \rho\sigma_\mu\sigma_\beta \\ \rho\sigma_\mu\sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{pmatrix}\right) \quad (12)$$

donde:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2(1-\rho^2)a_4} \left(a_2 - \frac{a_0 a_1}{2a_3}\right)$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2(1-\rho^2)a_3} \left(a_1 - \frac{a_2 a_0}{2a_4}\right)$$

$$\rho = \frac{a_0}{2\sqrt{a_4 a_3}}$$

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{2(1-\rho^2)a_4}$$

$$\sigma_\beta^2 = \frac{1}{2(1-\rho^2)a_3}$$

Para la distribución previa conjunta $\pi(\lambda, a, b)$ se asume que tiene distribución conjugada a la distribución GIG, esto por razones analíticas.

$$b \sim \Gamma(\zeta, \chi); \quad a|b \sim GIG\left(-1/2, \sqrt{b\omega\psi}, \sqrt{b\omega/\psi}\right) \quad (13)$$

Para obtener la distribución posterior conjunta de los parámetros μ, β y λ, a, b se realiza de forma separada al ser independientes ambos conjuntos de parámetros por construcción de la distribución tipo G.

$$\pi(\mu, \beta, \lambda, a, b|X, Z) \propto \pi(\mu, \beta|X, Z)\pi(\lambda, a, b|Z) \quad (14)$$

$$\pi(\mu, \beta|X, Z) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \beta \end{pmatrix}; m_g, D_g\right) \quad (15)$$

donde:

$$m_g = D_g(R_d^{-1}m_d + R_{prior}^{-1}m_{prior})$$

$$D_g = (R_d^{-1} + R_{prior}^{-1})^{-1}$$

$$m_d = R_d \left(\begin{array}{c} \sum x_i/z_i \\ \sum x_i \end{array} \right)$$

$$R_d^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \sum z_i^{-1} & n \\ n & \sum z_i \end{array} \right)$$

$$\lambda|a, b \propto \frac{(a^n \prod_{i=1}^n z_i)^\lambda}{K_\lambda(b)^n}$$

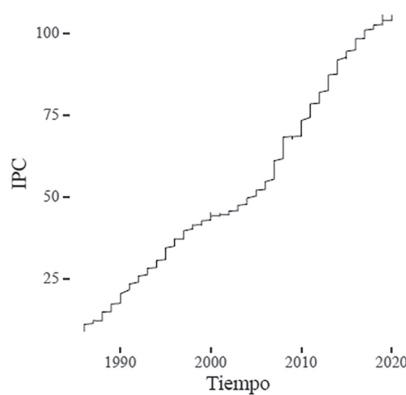
$$a|\lambda, b \sim GIG \left(n\lambda - 1/2, \sqrt{b \left(\sum_{i=1}^n z_i + \omega\psi \right)}, \sqrt{b \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} + \frac{\omega}{\psi} \right)} \right)$$

$$b|\lambda, a \propto \frac{b^{\zeta-1}}{K_\lambda(b)^n} \exp \left\{ -\frac{b}{2} \left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} + a \sum_{i=1}^n z_i + 2\chi \right) \right\} \quad (16)$$

3. RESULTADOS

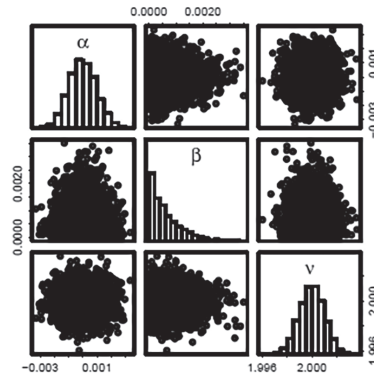
Se aplican los dos métodos anteriormente descritos en la estimación de parámetros de la distribución de cambios de precios (varianciones mensuales) del Índice de Precios al Consumidor con periodicidad desde Ene-1986 hasta Oct-2020, con base 2016=100 del Instituto Nacional de Estadística de Bolivia².

Figura 1: Índice de Precios al consumidor, frecuencia mensual, base 2016=100. Fuente: INE-Bolivia



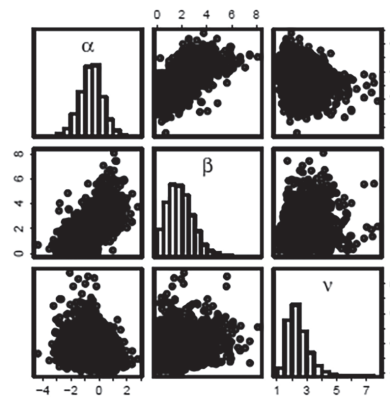
Fuente:Elaboración Propia

Figura 2: Valores de la distribución posterior de los parámetros μ, β y ν , bajo el método Metropolis Hastings, sin valores de quemado.



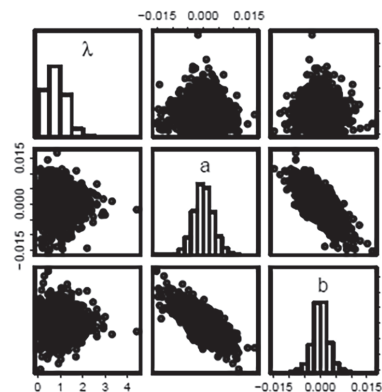
Fuente:Elaboración Propia

Figura 3: Valores de la distribución posterior de los parámetros μ, β, ν , bajo el método ABC-GIBBS, sin valores de quemado



Fuente:Elaboración Propia

Figura 4: Valores de la distribución posterior de los parámetros λ, a y b bajo el método ABC-GIBBS, sin valores de quemado.



Fuente:Elaboración Propia

²<https://www.ine.gob.bo/index.php/serie-historicaempalmada/>

Estimación de los parámetros de la distribución de cambios de precios mensuales del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia

Cuadro 1: Tabla de resultados y diagnóstico de los valores de la distribución posterior de los parámetros

Método/diag.	Estimación					
	$\hat{\mu}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\lambda}$	\hat{a}	\hat{b}
METROPOLIS H. (4.5m.)/desv.	$0,12 \cdot 10^{-4}$ (9.6)	$6,1 \cdot 10^{-4}$ (5.6)	2 ($9,9 \cdot 10^{-4}$)			
AIC		-2975				
BIC		-2964				
Geweke	0.9871	0.8818	0.9820			
Heidelberger	0.6420	0.1830	0.6580			
ABC-GIBBS (11.25m.)/desv.	$-0,55 \cdot 10^{-4}$ (0.82)	$47,8 \cdot 10^{-4}$ (1.07)	2.45 (0.76)	$7,8 \cdot 10^{-1}$ (0.45)	$-3,6 \cdot 10^{-5}$ (0.03)	$3,9 \cdot 10^{-4}$ (0.03)
AIC		-3008				
BIC		-2998				
Geweke	0.1999	0.7224	0.1065	0.2642	0.9814	0.8630
Heidelberger	0.2960	0.6910	0.4700	0.1100	0.2160	0.9790

Fuente:Elaboración Propia

4. CONCLUSIÓN

Se aprecia que el método Metropolis Hastings presenta un menor tiempo de procesamiento en la estimación de los parámetros de la distribución de cambios de precios, sin embargo, el método ABCGIBBS presenta un mejor ajuste que el método Metropolis Hastings en los criterios AIC y BIC.

BIBLIOGRAFÍA

1. Andrews, D., & Mallows, C. (1974). Scale mixtures of normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36 (1), 99–102. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2984774>
2. Barndorff, O., & Blaesild, P. (1981). *Hyperbolic Distributions and Ramifications: Contributions to Theory and Application* (C. Taillie, G. P. Patil, & B. A. Baldessari, Eds.; pp. 19–44). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-009-8549-0_2
3. Barndorff, O., & Halgreen, C. (1977). Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions. *Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete*, 38 (4), 309–311. doi: 10.1007/BF00533162
4. Beaumont, M., Zhang, W., & Balding, D. (2002). Approximate Bayesian Computation in Population Genetics. *Genetics*, 162 (4), 2025–2035.
5. Blattberg, R., & Gonedes, N. (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. *The Journal of Business*.
6. Diggle, P., & Gratton, R. (1984). Monte carlo methods of inference for implicit statistical models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*.

7. Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., & B., R. D. (2013). Bayesian data analysis (A. C. P. Company, Ed.). Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. Retrieved from 24000/e2cd08b709798adecf5e17aba6b1a033
8. Grosswald, E. (1976). The student t-distribution of any degree of freedom is infinitely divisible. *Zeitschrift Fur Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete*, 36 (2), 103–109.
9. Hastings, W. K. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57 (1), 97–109. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2334940>
10. Hichen, I., S.and Jerome. (2006). Bayesian blind separation of generalized hyperbolic processes in noisy and underdeterminate mixtures. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54 (9), 3257–3269. doi: 10.1109/TSP.2006.877660
11. Kyprianou, A. E. (2014). *Fluctuations of Lévy Processes with Applications: Introductory Lectures* (2nd ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
12. Marjoram, P., Molitor, J., Plagnol, V., & Tavaré, S. (2003). Markov chain Monte Carlo without Likelihoods. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100 (26), 15324–15328.
13. Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21 (6), 1087–1092. doi: 10.1063/1.1699114
14. Ratmann, O., Andrieu, C., Wiuf, C., & Richardson, S. (2009). Model criticism based on likelihoodfree inference, with an application to protein network evolution. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106 (26), 10576–10581. doi: 10.1073/pnas.0807882106
15. Rosinski, J. (1991). On A Class of Infinitely Divisible Processes Represented as Mixtures of Gaussian Processes (S. Cambanis, G. Samorodnitsky, & M. S. Taqqu, Eds.; pp. 27–41). Boston, MA: Birkhauser Boston. doi: 10.1007/978-1-4684-6778-9_2
16. Rubin, D. B. (1984). Bayesianly justifiable and relevant frequency calculations for the applied statistician. *Ann. Statist.*, 12 (4), 1151–1172. doi:10.1214/aos/1176346785
17. Sisson, S. A., Fan, Y., & Tanaka, M. M. (2007). Sequential monte carlo without likelihoods. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104 (6), 1760–1765. doi:10.1073/pnas.0607208104
18. Tavare, S., Balding, D. J., Griffiths, R. C., & Donnelly, P. (1997). Inferring coalescence times from dna sequence data. *Genetics*.
19. Turner, B., & Sederberg, P. (2014). A generalized, likelihood-free method for posterior estimation. *Psychonomic Bulletin Review*, 21 (2), 227–250. doi: 10.3758/s13423-013-0530-0
20. Turner, B., & Zandt, T. (2012). A tutorial on approximate bayesian computation. *Journal of*

Estimación de los parámetros de la distribución de cambios de precios mensuales del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia

Mathematical Psychology, 56 (2), 69–85. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmp.2012.02.005>

21. Turner, B., & Zandt, V. (2014). Hierarchical Approximate Bayesian Computation. *Psychometrika*, 79(2), 185209. Retrieved from <http://doi.org/10.1007/s11336-013-9381-x>
22. Voss, J. (2013). *An Introduction to Statistical Computing: A Simulation-based Approach* (1st ed.). Wiley.