

LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE DE NEYMAN

Lic. Vega Flores, Carmen

✉ c.vegaflores@hotmail.com

RESUMEN

El presente artículo explica los resultados de la aplicación de la Prueba de Bondad de Ajuste de Neyman sobre los registros de nacimientos producidos en la gestión 2015 en el Hospital Holandés de la ciudad de El Alto, del Departamento de La Paz.

PALABRAS CLAVE

Pruebas de Bondad de Ajuste, Pruebas Suavizadas de Bondad de Ajuste.

1. INTRODUCCIÓN

En la Inferencia Estadística se hace uso de modelos de distribución de probabilidad, estos modelos son a veces asumidos de antemano, comúnmente se denominan “supuestos”, tales suposiciones son hechas respecto a la distribución hipotética de los datos.

Por ejemplo, en una prueba de hipótesis con la distribución *T-student* se asume que la variable tiene distribución normal con varianza desconocida. Sin embargo, es necesario verificar tal supuesto de normalidad antes de aplicar dicha prueba T-student, de otra forma no sería válido su uso.

Es por esta razón que se han desarrollado las pruebas de bondad de ajuste, el procedimiento consiste en definir un estadístico, el cuál es alguna función de los datos que mide la distancia entre la función de la hipótesis y la distribución de la muestra.

$$H_0 : x \sim f(x)$$

$$H_a : x \neq f(x)$$

Los test de bondad de ajuste más comunes son: el test de Pearson, el test de Kolmogorov-Smirnov, y el test de Lilliefors.

2. LA PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Los modelos de bondad de ajuste comenzaron con Kart Pearson en el año (1900), el cual en un principio era solo aplicable a datos discretos cuando no existían parámetros desconocidos, la expansión de la metodología para cubrir más situaciones prácticas ha sido la preocupación de los estadísticos desde esa época. Fisher complementó el trabajo durante los años 1920 – 1927.

El problema de esta prueba de bondad de ajuste es que si la hipótesis nula es rechazada no existe una función alternativa para adoptar, tampoco se puede determinar donde radica el problema, es decir si es en la posición, escala asimetría, curtosis o en los otros momentos de mayor orden, esto hace que dicha prueba no resulte muy informativa para el investigador.

2.1 LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE DE NEYMAN

Neyman introdujo una prueba para cubrir una de las mayores críticas atribuidas al test Chi-cuadrado de bondad de ajuste, esta crítica radica en que, si la hipótesis nula es rechazada, no hay una distribución específica para la hipótesis alterna. De esta manera Neyman desarrolló las pruebas de bondad de ajuste suavizadas. El test fue llamado

La Prueba de Bondad de Ajuste de Neyman

suavizado porque la función de probabilidad de la hipótesis alterna es una función “Suavizada” de la función especificada en la hipótesis alterna, por ejemplo, la hipótesis nula puede especificar una distribución normal con media 0 y varianza 1, mientras la alternativa puede especificar la distribución normal con media y varianza igual a 1. Cambios suavizados incluyen alteraciones en la media, varianza, asimetría, curtosis, y en los momentos de mayor orden.

Es una prueba de hipótesis donde se sostiene:

$$H_0 : x \sim f(x)$$

$$H_a : x \sim f^*(x)$$

Si se tiene una muestra aleatoria de una distribución continua con función de distribución de probabilidad completamente especificada $f(x)$, aplicando la transformación $Y=F(x)$ se tiene que Y es uniforme $(0,1)$.

Las funciones suavizadas de orden k de Neyman fueron definidas entonces como:

$$f^*(x) = \exp\left\{\sum_{i=1}^k \theta_i p_i(y) - K(\theta)\right\},$$

$$0 < y < 1; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Donde: $\theta^t = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ es el vector de los momentos de los primeros momentos paramétricos. $K(\theta)$ es una constante introducida para garantizar que la integral sea uno y las funciones $p_i(y)$ son polinomios orto normales tales que:

$$\int_0^1 p_i(y) p_j(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

Estos polinomios están relacionados a los polinomios de Legendre, los primeros cinco de estos son:

$$p_0(y) = 1$$

$$p_1(y) = \sqrt{3}(2y-1)$$

$$p_2(y) = \sqrt{7}(20y^3 - 30y^2 + 12y - 1)$$

$$p_3(y) = \sqrt{5}(6y^2 - 6y + 1)$$

$$p_4(y) = 3(70y^4 - 140y^3 + 90y^2 - 20y + 1)$$

Luego para probar las hipótesis:

$$H_0 : x \sim f(x)$$

$$H_a : x \sim f^*(x)$$

Es equivalente a probar que:

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = 0$$

$$H_a : \text{al menos un } \theta_i \neq 0$$

De esta manera el estadístico de prueba está dado por:

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^k U_i^2, \text{ con los componentes:}$$

$$U_i = \sum_{j=1}^n p_i(y_j) / \sqrt{n}$$

El estadístico de prueba χ_o^2 tiene distribución asintótica Chi-cuadrado con k grados de libertad y los componentes U_i^2 se distribuyen Chi-cuadrado con un grado de libertad.

La ventaja de esta prueba de bondad de ajuste radica en que el componente U_i está relacionado con el parámetro θ_i , es decir que se los puede utilizar para contrastar:

$$H_0 : \theta_i = 0$$

$$H_a : \theta_i \neq 0$$

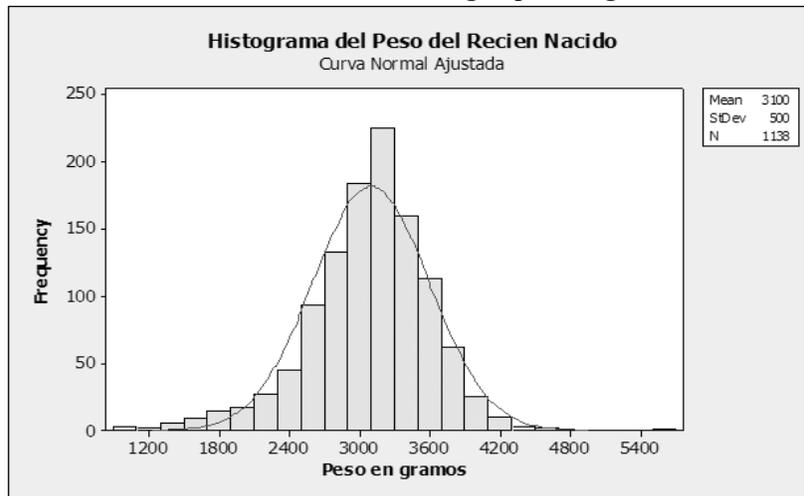
De tal manera que si la hipótesis nula es rechazada se puede contrastar cada componente para detectar cual o cuales son los que varían significativamente y de esta manera encontrar la causa de la variación que llevó al rechazo de la hipótesis nula. Si la hipótesis nula no se rechaza, se puede testear cada componente para encontrar

alguna variación pequeña que no esta siendo detectada por la prueba de bondad de ajuste. Por todo lo dicho anteriormente, la prueba de bondad de ajuste de Neyman resulta más informativa y exhaustiva que la prueba de Pearson.

3. APLICACIÓN

Para aplicar dicha prueba se analizaron los registros de 1.128 nacimientos producidos en la gestión 2015 en el Hospital Holandés de la ciudad de El Alto.

Gráfico 1
Número de recién nacidos según peso en gramos

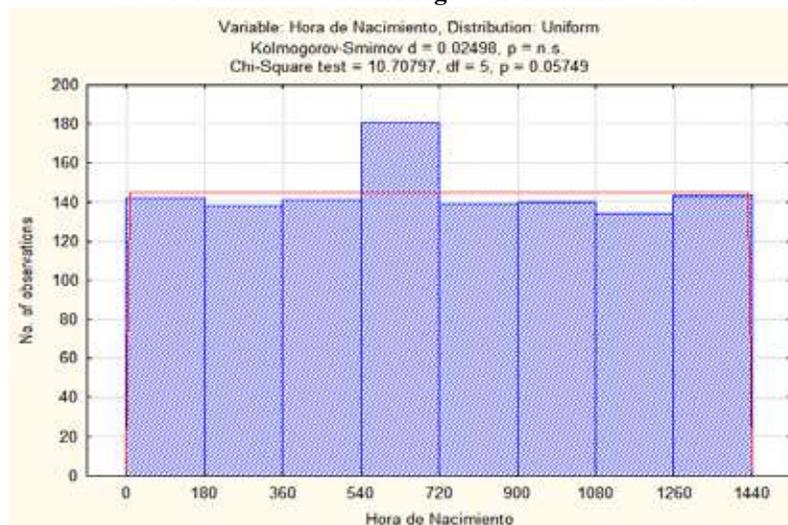


k	1	2	3	4
U^2	81,31	4,38	13,07	22,35
Ψ^2_k	81,31	85,69	98,76	121,10

Fuente: Elaboración propia con datos del Hospital Holandés.

Los resultados de la prueba suavizada de Bondad de Ajuste indican que se debe rechazar la hipótesis de ajuste normal al 5% de significación en los cuatro aspectos: posición, dispersión, asimetría y curtosis.

Gráfico 2
Número de recién nacidos según hora de nacimiento

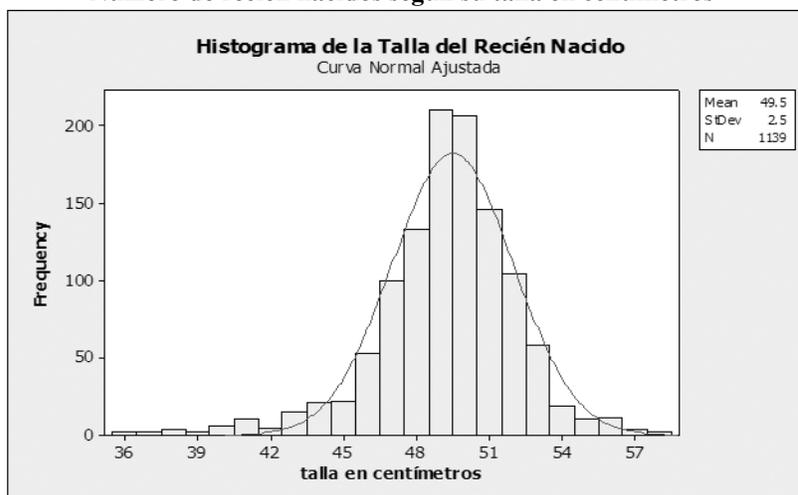


Fuente: Elaboración propia con datos del Hospital Holandés.

k	1	2	3	4
U_j^2	0,20	0,86	0,02	3,57
Ψ_k^2	0,20	1,05	1,07	4,64

El resultado de la prueba de Bondad de Ajuste determina la aceptación de la hipótesis de ajuste a la distribución uniforme con nivel de significación del 5% en los cuatro aspectos: posición, dispersión, asimetría y curtosis.

Gráfico 3
Número de recién nacidos según su talla en centímetros



k	1	2	3	4
U_j^2	3,89	2,69	11,90	26,32
Ψ_k^2	3,89	6,58	18,48	44,81

Fuente: Elaboración propia con datos del Hospital Holandés.

Este último resultado de la prueba de Bondad de Ajuste indica la normalidad sólo en el aspecto de la dispersión y no así en las otras como: posición, asimetría y curtosis, a un nivel de 5% de significancia.

4. CONCLUSIÓN

Se llega a concluir que la distribución de los pesos y las estaturas de los recién nacidos se ajusta a una distribución normal, no así la distribución de la hora del nacimiento en 24

horas del día, se prueba que la distribución uniforme falla con los nacimientos entre las 9:00 y las 12:00 del día, esto se debe a las cesáreas programadas que ha distorsionado la falta de aleatoriedad.

BIBLIOGRAFÍA

- Rayner John, “*Smooth Test Of Godness Of Fit*”, New York 1986
- Valdez Blanco Dindo, “*Pruebas suavizadas de bondad ajuste con aplicación en pruebas no paramétricas*”, La Paz 2001.