El Proceso de Poisson

Autor: M.Sc. Nicolás Chávez Quisbert

DEFINICIÓN.-

Sea $\{N(t)\ \ , t \geq 0\}$ un proceso puntual discreto en el espacio y continuo en el tiempo, se dice que define a un Proceso de Poisson, si $N(t)$ representa el número de ocurrencias en el intervalo de tiempo $(0,t)$, donde λ es una tasa promedio de ocurrencias constante por unidad de tiempo.

$$\lambda = \frac{\#\text{ de ocurrencia}}{tiempo}$$

Y se cumple los siguientes axiomas:

1. $\{N(t)\ \ , t \geq 0\}$ Es un proceso de incrementos independientes estacionarios.
2. $P\left[N(t+\Delta t) - N(t) = 1\right] = \lambda\,\Delta t + 0(\Delta t)$
3. $P\left[N(t+\Delta t) - N(t) = 0\right] = 1 - \lambda\,\Delta t + 0(\Delta t)$ (1)
4. $P\left[N(t+\Delta t) - N(t) > 1\right] = 0(\Delta t)$
5. $P\left[N(0) = 0\right] = 1$

Donde:

- Δt es un incremento en el tiempo infitesimal.
- $0(\Delta t)$.Es una función del tiempo Δt .

Y se cumple las siguientes propiedades:

1. $0(\Delta t) \pm 0(\Delta t) = 0(\Delta t)$
2. $c\ 0(\Delta t) = 0(\Delta t)$ con c ≠0 constante (2)
3. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

TEOREMA 1

Sea $\{N(t)\ \ , t \geq 0\}$ es un Proceso de Poisson de parámetro λ, para todo par de índices $t > s \quad \in T$ se cumple la siguiente función probabilística.

$$P\left[N(t) - N(s) = k\right] = \frac{e^{-\lambda(t-s)}\left(\lambda(t-s)\right)^K}{k!} \qquad k = 0,1,2....... \quad (3)$$

0 en otro caso

Si s=0

$$P\left[N(t) = k\right] = \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^K}{k!} \qquad k = 0,1,2....... \quad (4)$$

0 en otro caso

Si s=0 y t =1

$$P\left[N(t) = k\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,1,2,...... \quad (5)$$

0 en orto caso

DEMOSTRACIÓN

Para el caso en particular cuando s = 0 se tiene que:

Por notación $P[N(t) = k] = P_k(t)$, y aplicando los axiomas definidos en (1), tenemos.

$Para : k = 0$

$$P_0(t+\Delta t) = -P_0(t) + P[N(t+\Delta t) + N(t) = 0]$$

$$= -P_0(t) + P[1 - \lambda\Delta t) + 0(\Delta t)]$$

$$= -P_0(t) - P_0\lambda\Delta t + P_0 0(\Delta t) \qquad \left\| \frac{1}{\Delta t} \right.$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\lambda+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \Big\|\lim_{\Delta t\to 0}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\lambda+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}^{\;0}$$

$$P_0'(t)=-P_0(t)\lambda \qquad \kappa=0$$

Para : K≥1

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]+P_{k-1}(t)P[N(t+\Delta t)-N(t)=1]+$$

$$+P_{k-2}(t)P[N(t+\Delta t)-N(t)=2]+\ldots\ldots+P_0(t)P[N(t+\Delta t)-N(t)=k]$$

$$=P_k(t)[1-\Delta t+0(\Delta t)]+P_{k-1}(t)[\lambda\Delta t+0(\Delta t)]+P_{k-2}(t)0(\Delta t)+\ldots+P_0(t)0(\Delta t)$$

$$=P_k(t)-P_k(t)\lambda\Delta t+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+0(\Delta t)$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=-P_k(t)\lambda\Delta t+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+0(\Delta t) \qquad \Big\|\frac{1}{\Delta t}$$

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-P_k(t)\lambda+P_{k-1}(t)\lambda+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \Big\|\lim_{\Delta t\to 0}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-P_k(t)\lambda+P_{k-1}(t)\lambda+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}^{\;0}$$

$$P_k'(t)=-P_k(t)\lambda+P_{k-1}(t)\lambda \qquad k=1,2,3\ldots\ldots\ldots$$

Hallando la solución de la ecuación diferencial se tiene que:

$$P_k'(t)=-P_k(t)\lambda+P_{k-1}(t)\lambda \qquad \Big\|z^k$$

$$P_k'(t)z^k=-P_k(t)\lambda z^k+P_{k-1}(t)\lambda z^k \qquad \Big\|\sum_{k=0}^{\infty}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k'(t)z'=-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)z^k+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}P_{k-1}(t)z^k \qquad (6)$$

Aplicando la Función Generadora de Probabilidades[1].

$$G(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)z^k \qquad P[N(t)=k]=\frac{1}{k!}\frac{d^kG}{dz^k}\Big|_{z=0}$$

(7)

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k'(t)z^k$$

Se tiene que la expresión (6) se convierte en:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\lambda G+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}P_{k-1}(t)z^k$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\lambda G+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}P_{k-1}(t)z^k \quad \frac{z}{z}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\lambda G+\lambda\sum_{k-1=0}^{\infty}P_{k-1}(t)z^{k-1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\lambda G+\lambda zG$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\lambda G(1-z)$$

$$\int\frac{\partial G}{G}=\int-\lambda(1-z)\partial t$$

$$\ln G=-\lambda(1-z)t+c$$

$$e^{\ln G}=e^{-\lambda(1-z)t+c}$$

$$G=e^{-\lambda(1-z)t}e^c \qquad e^c=c_1 \quad cte.$$

$$G=e^{-\lambda(1-z)t}c_1$$

Condición inicial t = 0

El lado izquierdo se convierte en:

$$G(z,0)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(0)z^k$$

$$=P_o(0)z^o+P_1(0)z^1+P_2(0)z^2+\ldots\ldots$$

$$=1z^0+0z^1+0z^2+0z^3+\ldots\ldots\ldots=1*1=1$$

1 La Función Generadora de Probabilidades, es una Función Matemática que permite obtener Modelos Probabilísticos y Momentos de variables aleatorias discretas, se lo denota como G=G(Z)=G(Z.t)

El lado derecho se convierte en:

$$e^{-\lambda(1-z)0}c_1 = e^0 c_1 = c_1$$

$$G(z,0) = e^{-\lambda(1-z)0}c_1 = c_1$$

De donde se tiene que $c_1=1$, por lo tanto:

$$G = e^{-\lambda(1-z)t}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = e^{-\lambda(1-z)t}(\lambda t)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = e^{-\lambda(1-z)t}(\lambda t)^2$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial z^3} = e^{-\lambda(1-z)t}(\lambda t)^3$$

.

.

.

$$\frac{\partial^k G}{\partial z^k} = e^{-\lambda(1-z)t}(\lambda t)^k$$

De (7) se tiene que:

$$P[N(t)=k] = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k G}{\partial z^k} \Big|_{z=0}$$

$$P[N(t)=k] = \frac{1}{k!}e^{-\lambda(1-z)t}\ (\lambda t)^k \Big|_{z=0}$$

$$P[N(t)=k] = \frac{1}{k!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k$$

$$P[N(t)=k] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0,1,2......$$

o en otro caso

TEOREMA 2

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un Proceso de Poisson, de parámetro λt entonces las siguientes medidas estadísticas y función característica se cumplen:

a) $\mathrm{m(t)} = E[N(t)] = \lambda t$ (8)

b) $\mathrm{V[N(t)]} = \lambda t$

c) $\underset{N(t)}{\phi}(w) = e^{\lambda t(e^{iw}-1)}$

d) $R_N(s,t) = \lambda \min(s,t)$

e) $\rho_{N(s,t)} = \dfrac{\min(s,t)}{(st)^{1/2}}$

DEMOSTRACIÓN

a)

$$m(t) = E(N(t)) = \sum_{N(t)=0}^{\infty} N(t)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{(N(t))!}$$

$$m(t) = \sum_{N(t)=1}^{\infty} \frac{N(t)e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)(N(t)-1)!}$$

$$m(t) = e^{-\lambda t}\sum_{N(t)-1=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{N(t)}}{(N(t)-1)!}\frac{\lambda t}{\lambda t}$$

$$m(t) = e^{-\lambda t}\lambda t \sum_{N(t)-1=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{N(t)-1}}{(N(t)-1)!}$$

$$m(t) = e^{-\lambda t}\lambda t\, e^{\lambda t} = \lambda t e^{0} = \lambda t \qquad (9)$$

b) Hallando el segundo momento alrededor del origen se tiene que:

$$E(N^2(t)) = \sum_{N(t)}^{\infty} N^2(t)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)}$$

$$= \sum_{N(t)=0}^{\infty}[N(t)(N(t)-1)+N(t)]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!}$$

λt

$$= \sum_{N(t)=0}^{\infty} N(t)(N(t)-1)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!} + \sum_{N(t)=0}^{\infty} N(t)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!}$$

$$= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2 \sum_{N(t)-2=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{N(t)-2}}{(N(t)-2)!} + \lambda t$$

$$= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2 e^{\lambda t} + \lambda t = \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

(10)

De los resultados obtenidos en (9) y (10) se tiene que:

$$V(N(t)) = E[N^2(t)] - [E(N(t))]^2$$

$$= \lambda^2 t^2 + \lambda t - \lambda^2 t^2 = \lambda t$$

(11)

c)

$$\phi_{N(t)}(w) = E[e^{iwN(t)}] = \sum_{N(t)=0}^{\infty} e^{iwN(t)} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{N(t)=0}^{\infty} \frac{(e^{iw})^{N(t)}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!}$$

$$= e^{-\lambda t} e^{e^{iw}\lambda t} = e^{\lambda t(e^{iw}-1)}$$

d) Suponiendo s < t

$$R_N(s,t) = COV(N(s), N(t))$$

$$R_N(s,t) = COV(N(s), N(t) - N(s) + N(s))$$

$$= COV(N(s), N(t) - N(s)) + COV(N(s), N(s))$$

$$= COV(N(s) - N(0), N(t) - N(s)) + COV(N(s), N(s))$$

$$= V(N(s))$$

(12)

$$= \lambda s$$

Suponiendo t < s:

$$R_N(s,t) = COV(N(s), N(t))$$

$$R_N(s,t) = COV(N(s) - N(t) + N(t), N(t))$$

$$= COV(N(s) - N(t), N(t)) + COV(N(t), N(t))$$

$$= COV(N(s) - N(t), N(t) - N(0)) + COV(N(t), N(t))$$

$$= V(N(t))$$

$$= \lambda t$$

(13)

Por lo tanto de los resultados obtenidos en (12) y (13) se tiene que

$$R_{N(t)}(t,s) = \lambda \min(s,t) \qquad (14)$$

e) Sustituyendo los resultados obtenidos en (11) y (14)

$$\rho_N(s,t) = \frac{COV(N(s), N(t))}{\sigma_{N(t)}\sigma_{N(s)}}$$

$$= \frac{\lambda \min(s,t)}{\sqrt{\lambda s}\sqrt{\lambda t}}$$

$$\rho_{N(t)}(s,t) = \frac{\min(s,t)}{(st)^{1/2}}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] DERNETT RICK, (2010), ESSENTIALS OF STOCHASTIC PROCESSES, SPRINGER, USA.

[2] KARLIN SAMUEL, TAYLOR HOWARD M. (1974), A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES, ACADEMIC PRESS, LONDON.

[3] NARARAN BHAT U. (1984) ELEMENTS OF APPLIED STOCHASTIC PROCESSES, JOHN WILEY& SONS CANADA.

[4] PARZEN EMANUEL (1972), PROCESOS ESTOCASTICOS, PARANINFO, MADRID.

[5] V. S. KOROLIUK (1986) MANUAL DE LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES Y ESTADISTICA MATEMATICA, MIR , MOSCU.