

## Modelos de Programación Lineal y No Lineal con Multiobjetivos

Autor: M.Sc. Nicolas Chavez Quisbert

### 1. Introducción

La programación por metas (Goal Programming) fue inicialmente introducida por Charnes y Cooper en los años 50 desarrollada en los años 70 por Ljiri, Lee, Ignizio y Romero, es actualmente uno de los enfoques multicriterio que más se utilizan.

En principio fue dirigida a resolver problemas industriales, sin embargo posteriormente se ha extendido a muchos otros campos como la economía, agricultura, recursos ambientales, recursos pesqueros, etc.

En este artículo lo que quiere es mostrar la mejor toma de decisiones desde un punto de vista Gerencial, y de cómo lograr tomar estas mejores decisiones, utilizando Modelos de Programación Lineal y No Lineal con Multiobjetivos, todo con el fin de maximizar beneficios minimizando costos y recursos.

### 2. Aspectos básicos de la programación por objetivos

Entre los aspectos básicos de la programación con multiobjetivos se tiene que:

La Programación por Objetivos proporciona una manera racional de intentar alcanzar varios objetivos de manera simultánea, jerarquizando los mismos o asociándole una ponderación a cada uno.

El enfoque básico de la Programación por Objetivos es establecer un objetivo numérico específico para cada uno de los objetivos, formular una función objetivo para cada uno y después buscar una solución que minimice la suma ponderada de las desviaciones de estas funciones objetivo de sus metas respectivas.

Tres tipos de metas:

Meta unilateral inferior: establece un límite inferior por abajo del cual no se quiere ir (pero se aceptan desvíos a la meta que deberá minimizarse)

$$\text{Ej.: } a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \geq \text{Meta1}$$

Meta unilateral superior: establece un límite superior que no se quiere exceder (pero se aceptan desvíos a la meta que deberá minimizarse)

$$\text{Ej.: } a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq \text{Meta2}$$

Meta bilateral: establece un “blanco” específico que no se quiere perder hacia ningún lado.

$$\text{Ej.: } a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq \text{Meta3}$$

### 3. Formulación de una ecuación objetivo para cada meta

En el modelo de Programación por Objetivos existen dos tipos de restricciones funcionales: las restricciones ordinarias de Programación Lineal (restricciones “duras” o estrictas) y las ecuaciones objetivo (“blandas” o flexibles). Las restricciones “duras” requieren ser cumplidas de manera estricta. Las restricciones “blandas” pueden admitir desvíos a la meta establecida, pero estos desvíos estarán asociados a una penalización que se reflejará en un parámetro en la Función Objetivo.

Valor objetivo de la Meta

El Valor de la Meta se descompone en dos elementos: (1°) el valor correspondiente al nivel de la Meta alcanzado

efectivamente  $\sum_j a_j x_j$  y (2°) el desvío o diferencia entre el valor meta y el nivel alcanzado ( $d_j$ ):

$$\sum_j a_j x_j = M_i d_i$$

Variables de desvío

Para formalizar los desvíos aceptados a cada una de las metas se emplea las variables auxiliares  $d_j$ ; las que por definición pueden obtener valores positivos o negativos.

Para poder hacer operativo el modelo de Programación Lineal cada  $d_i$  se sustituirá por la diferencia de dos variables no-negativas:

$$d_i = d_i^+ - d_i^- \quad \text{donde } d_i^+, d_i^- \geq 0$$

Con la siguiente definición:

$$d_i^+ = \begin{cases} d_i & \text{si } d_i \geq 0 \\ 0 & \text{otra manera} \end{cases}$$

$$d_i^- = \begin{cases} |d_i| & \text{si } d_i \leq 0 \\ 0 & \text{otra manera} \end{cases}$$



## 4. La función objetivo

Depende del procedimiento, si se consideran los diferentes objetivos de manera simultánea (Objetivos sin prioridades) o si por el contrario se adopta un procedimiento secuencial (Objetivos con prioridades). En el primer caso se tratará de Minimizar una función ponderada de las variables de desvío.

En el segundo caso se identificarán “m” modelos de PL a ser optimizados de manera secuencial y de acuerdo a los “m” niveles de jerarquía asignados a los objetivos. La secuencia se resuelve por nivel de jerarquía, desde el nivel de mayor prioridad al de menor.

## 5. Modelo de programación meta lineal

Las suposiciones básicas que caracterizan el modelo de programación lineal se aplican igualmente al modelo de programación meta. La diferencia principal en la estructura es que la programación meta no intenta minimizar o maximizar la función objetivo como lo hace el modelo de programación lineal, en vez busca minimizar las desviaciones entre las metas deseadas y los resultados reales de acuerdo a las prioridades asignadas. El objetivo o función de preferencia de un modelo de programación meta es expresado en términos de las desviaciones de las metas a que se apunta. Esto es, las variables de holgura o sobrantes de las restricciones se colocan en la función objetivo y deben minimizarse. El modelo general de la programación meta se define como:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^m w_i (d_i^+ + d_i^-) \quad (1)$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad \text{para todo } i \quad (2)$$

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad \text{para todo } j \quad (3)$$

La variable  $x_j$  representa una variable de decisión,  $w_i$  representan los pesos de ponderación (ordinal o cardinal) asignados a cada una de las meta, y  $d_i^+$  y  $d_i^-$  presenta el grado de sobrelogro y sublogro de la meta, respectivamente. Puesto que al mismo tiempo no podemos tener logro por encima y por debajo de la meta, o una o ambas de estas variables debe ser igual a cero.

## 6. Modelo de programación meta cuadrática

En toda la teoría desarrollada hasta ahora, hemos supuesto que la función objetivo de la programación meta es lineal. Por tanto, el incremento en cualquier desviación,  $d_i$ , siempre adiciona una cantidad igual de desutilidad, independiente del nivel de todas las otras desviaciones meta. En esta parte supondremos que la función objetivo del modelo de programación meta es cuadrática y sujeta a restricciones lineales. Esto no presenta dificultades de cómputo, puesto que los algoritmos de programación cuadrática estándar pueden utilizarse para resolver dichos problemas. Parte de la discusión actual en programación cuadrática meta se ha tomado de Shim y Siegel (1975).

El problema de programación cuadrática meta se define como:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m w_i (d_i^- d_j^- + d_i^+ d_j^+ + d_i^- d_j^+) \quad (4)$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad \text{para todo } i \quad (5)$$

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad \text{para todo } i, j. \quad (6)$$

Como antes, deseamos encontrar variables  $x_j, d_i^-$  y  $d_i^+$  para minimizar la función objetivo anterior, que está compuesta de los términos cuadráticos,  $d_1^{-2}$ , y una iteración de los términos del producto cruzado  $d_1^- d_2^+$ . La función objetivo, por consiguiente, debe ser una función convexa para garantizar una función global óptima para este problema de minimización utilizando un algoritmo de programación cuadrática existente.

Existen dos metodologías clásicas de solución para modelos con multiobjetivos, Taha (2004), los cuales son, el Método de Factores de Ponderación y el Método de Jerarquías.

## 7. Bibliografía

Cohen Daniel (1993), Sistemas De Información Para La Toma De Decisiones, Mcgraw Hill, México

Heizer Jay (1997). Dirección De La Producción Decisiones Técnicas, Prentice Hall, España

Hiller F. Liberman G. (1991), Introducción A La Investigación De Operaciones, Ediciones Mcgpaw – Hill, México

Hodson William, (1996) Manual Del Ingeniero Industrial, Mcgraw Hill, México

Mathur K. Solow D. (1996), Investigación De Operaciones, Prentice All, México

Moskowitz H. Wright G. (1982), Investigación De Operaciones,

Prentice Hall, México

Taha Hamdy, (2004) Investigación De Operaciones Prentice All, México

*El pensamiento estadístico es una filosofía dentro de la cual el aprendizaje y la acción se basan en tres principios, cualquier trabajo ocurre en procesos interconectados, dentro de éstos existen variaciones y para poder tener éxito al aplicar este pensamiento hay que entender los procesos y reducir las variaciones.*

**LA ESTADÍSTICA ES LA BASE PARA LA PLANIFICACIÓN Y LA PLANIFICACIÓN ES EL INSTRUMENTO DEL DESARROLLO**