Soluciones Alternativas

Autor: Lic. Raúl Delgado Álvarez

Cuando nos preguntamos quienes son los lectores de la revista de la carrera, con seguridad son los estudiantes de Estadística entre otros lectores, es innovador que una actividad deseable en los estudiantes debe ser la de buscar soluciones distintas a las mostradas en clases que por años puede ser la misma, este aspecto psicopedagógico del aprendizaje permite comprender, hacer suyo el conocimiento, por lo tanto, mostrar que existen soluciones alternativas a problemas lo cual afianza los conocimientos, permite sostener la comprensión de la teoría en problemas prácticos, convencido de este proceso es importante para la investigación, me permito plantear un problema y los argumentos necesarios para su solución de dos maneras.

PROBLEMA

Demostrar que el coeficiente de curtosis (de Fisher) para la Distribución Binomial de parámetros n y p es:

$$g_2 = 3 + \frac{1 - 6p + 6p^2}{np\ (1-p)}$$

Primera solución

La función denominada de los Cumulantes definida como:

$$C_x(t) = \ln\,[M_x(t)]$$

goza de las propiedades:

(1) $C_x^{'}(0) = E[x] C_x^{'}(0) = E[x]$

(2) $C_x^{''}(0) = V[x] C_x^{''}(0) = V[x]$

(3) $C_x^{'''}(0) = \mu_3 C_x^{'''}(0) = \mu_3$

(4) $C_x^{iv}(0) = \mu_4 - 3(\mu_2)^2$
$C_x^{iv}(0) = \mu_4 - 3(\mu_2)^2$

Dada la f.g.m. de la Distribución Binomial

$$M_x(t) = [1 - p + pe^t]^n M_x(t) = [1 - p + pe^t]^n,$$

Haciendo $q = 1 - pq = 1 - p$

$$M_x(t) = (q + pe^t)^n$$

aplicando logaritmos

$$\ln[M_x(t)] = n\ln\,(q + pe^t)$$

derivando:

$$C_x^{'}(t) = \frac{n}{q+pe^t} pe^t = npe^t(q + pe^t)^{-1} \qquad (1)$$

$$C_x^{''}(t) = np\,\{e^t(q + pe^t)^{-1} + e^t(-1)(q + pe^t)^{-2}pe^t\}$$

$$C_x^{''}(t) = npqe^t(q + pe^t)^{-2} \qquad (2)$$

$$C_x^{'''}(t) = npq\ \{e^t(q + pe^t)^{-2} + e^t(-2)(q + pe^t)^{-3}pe^t\}$$

$$C_x^{'''}(t) = npq\,(qe^t + pe^{2t})(q + pe^t)^{-3} \qquad (3)$$

$$C_x^{iv}(t) = npq\ \{(qe^t - 2pe^{2t})(q + pe^t)^{-3} + (qe^t - pe^{2t})(-3)(q + pe^t)^{-4}pe^t\}$$

$$C_x^{iv}(t) = npq[(qe^t - 2pe^{2t})$$

$$(q+pe^t)^{-3} - 3pe^t(qe^t - pe^{2t})(q+pe^t)^{-4} \qquad (4)$$

Evaluando (2) y (4) para t=0 se tiene:

$$C_x^{''}(0) = npq = np(1-p) = V[x] ó \mu_2 = np(1-p)$$

$$C_x^{iv}(0) = npq\{(q-2p) - 3(q-p)p\}$$

volviendo a $q = 1-p$

$$C_x^{iv}(0) = np(1-p)(1-6p+6p^2)$$

$$\rightarrow \ \mu_4 = C_x^{iv}(0) + 3(\mu_2)^2$$

$$\mu_4 = C_x^{iv}(0) + 3(\mu_2)^2$$

$$\mu_4 = np(1-p)(1-6p+6p^2) + 3[np(1-p)]^2$$

$$\mu_4 = 3n^2p^2(1-p)^2 + np(1-p)(1-6p+6p^2)$$

El coeficiente de Curtosis de Fisher es:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} \rightarrow g_2 = \frac{3n^2p^2(1-p)^2 + np(1-p)(1-6p+6p^2)}{n^2p^2(1-p)^2}$$

$$g_2 = 3 + \frac{1-6p+6p^2}{np\ (1-p)}$$

Segunda Solución

Una solución alternativa para encontrar el coeficiente de curtosis para la Distribución Binomial de parámetros n y p es aplicar la formula de recurrencia para los momentos centrales

$$\mu_{r+1} = p(1-p)[nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}]$$

cuya demostración se basa en la derivada del momento central de orden r.

Demostración

$$\mu_r = E[x = E(x)]^r$$

$$= \sum_{x=0}^{n} (x-np)^r \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Derivando:

$$\frac{d\mu_r}{dp} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \frac{d}{dp}\{(x-np)^r p^x (1-p)^{n-x}\}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \{r(x-np)^{r-1}(-n)p^x(1-p)^{n-x} + (x-np)^r x p^{x-1}(1-p)^{n-x} + (x-np)^r p^x (n-x)(-1)(1-p)^{n-x-1}\}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \{-nr(x-np)^{r-1}p^x(1-p)^{n-x} + (x-np)^r[(x-np) + np]p^{x-1}(1-p)^{n-x} - (n-x)(x-np)^r p^x (1-p)^{n-x-1}\}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \{-nr(x-np)^{r-1}p^x(1-p)^{n-x} + (x-np)^{r+1}p^{x-1}(1-p)^{n-x} + np^{x-1}(1-p)^{n-x}(x-np)^r - n(x-np)^r p^x (1-p)^{n-x-1} + [(x-np)+np](x-np)^r p^x (1-p)^{n-x-1}\}$$

Introduciendo el símbolo sumatorio se tiene:

$$= -nr \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \{(x-np)^{r-1}p^x(1-p)^{n-x} + \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (x-np)^{r+1}p^x(1-p)^{n-x}$$

$+n\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(x-np)^r p^x(1-p)^{n-x} - \frac{n}{1-p}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(x-np)^r p^x(1-p)^{n-x} + \frac{1}{1-p}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(x-np)^{r+1} p^x(1-p)^{n-x} - \frac{np}{1-p}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(x-np)^r p^x(1-p)^{n-x}$

Identificando los momentos centrales:

$$\frac{d\mu_r}{dp} = -nr\mu_{r-1} + \frac{1}{p}\mu_{r+1} + n\mu_r - \frac{n}{1-p}\mu_r + \frac{1}{1-p}\mu_{r+1} + \frac{np}{1-p}\mu_r$$

$$= -nr\mu_{r-1} + \frac{1-p+p}{p(1-p)}\mu_{r+1}$$

$$+n\mu_r - \left(\frac{n-np-n+np}{1-p}\right)\mu_r$$

$$\frac{d\mu_r}{dp} = -nr\mu_{r-1} + \frac{\mu_{r+1}}{p(1-p)} \rightarrow \mu_{r+1}$$

$$= p(1-p)[nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}]$$

Aplicando la formula de recurrencia

$$\mu_{r+1} = p(1-p)[nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}]$$

$$\mu_0 = E[x-E(x)]^0 = 1$$

$$\mu_0 = 1 \qquad \frac{d(1)}{dp} = 0$$

$$\frac{d\mu_0}{dp} = 0\ ;$$

$$\mu_1 = p(1-p)\left[n(0)\mu_0 + \frac{d\mu_0}{dp}\right]$$

$$= p(1-p)[0+0] = 0$$

$$\mu_2 = p(1-p)[n(1)(\mu_0) + 0]$$

$$= p(1-p)n$$

$$= np(1-p)$$

$$\mu_3 = p(1-p)\left[n(2)(\mu_1) + \frac{d\mu_2}{dp}\right]$$

$$= p(1-p)[0 + n(1-2p)]$$

$$\mu_3 = p(1-p)n(1-2p)$$

$$= n[(p-p^2)(1-2p)]$$

$$\mu_3 = n(p-p^2-2p^2+2p^3)$$

$$= n(p-3p^2+2p^3)$$

$$\frac{d\mu_3}{dp} = n(1-6p+6p^2)$$

$$\mu_4 = p(1-p)[n(3)\mu_3 + \frac{d\mu_3}{dp}]$$

$$= p(1-p)[3n^2p(1-p) + n(1-6p+6p^2)]$$

$$\mu_4 = np(1-p)[3np(1-p) + (1-6p+6p^2)]$$

Aplicando los momentos centrales, en el coeficiente de curtosis:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

$$= \frac{np(1-p)[3np(1-p)+(1-6p+6p^2)]}{n^2p^2(1-p)^2}$$

$$g_2 = \frac{[3np(1-p)+(1-6p+6p^2)]}{np(1-p)}$$

$$g_2 = 3 + \frac{1-6p+6p^2}{np(1-p)}$$