Modelación Estocástica de Series de Tiempo Univariantes con Influencia de Tendencia y Estacionalidad

Autor: M.Sc. Nicolás Chávez Quisbert

El modelo más apropiado basado en los procesos estocásticos para modelar series de tiempo con dichas características es:

ARIMA (p,d,p) * SARIMA (P,D,Q)

1. Modelo Multiplicativo

ARIMA (p, d, p)*SARIMA (P, D, Q)

El modelo multiplicativo sugerido por Box y Jenkins para explicar a series con ambos efectos, parte del siguiente hecho.

Sea el modelo estacional:

$$\phi_p\left(B^s\right)\nabla_s^D\left(Z_t-\mu\right)=\theta_Q\left(B^s\right)\alpha_t \qquad (1)$$

Donde α_t es un proceso de no ruido blanco, sino más bien generado por un proceso ARIMA (p, d, p) de la forma:

$$\phi_p(B)\nabla^d\alpha_t=\theta_q(B)\mathrm{a}_t \qquad (2)$$

Con a_t proceso de ruido blanco.

De la expresión (2) despejando α_t se tiene que:

$$\alpha_t=\frac{\theta_q(B)\mathrm{a}_t}{\phi_p(B)\nabla^d} \qquad (3)$$

Reemplazando la expresión (3) en (1) se obtiene el modelo multiplicativo.

$$\phi_p(B)\phi_P\left(B^s\right)\nabla^d\nabla_s^D\left(Z_t-\mu\right)=\theta_q(B)\theta_Q\left(B^s\right)\mathrm{a}_t \qquad (4)$$

2. Identificación de un Modelo Multiplicativo

Esta etapa, es una de las más complicadas e importantes, ya que aquí se decidirla el orden de los procesos autorregresivos y de medias móviles tanto en la parte regular como estacional, para un modelo estacional multiplicativo.

Para identificación de los modelos, es bueno hacer uso de las funciones de autocovarianza, y autocorrelación y autocorrelación parcial, los cuales permitirán determinar el orden de los procesos ya sea en la parte regular, y estacional.

La Función de Autocorrelación da los órdenes de la parte MA ya sea en la parte regular o estacional , es decir los valores de q y Q, y la Función de Autocorrelación Parcial da los órdenes de la parte AR ya sea en la parte regular o estacional, es decir los valores de p y P.

2.1. Función Generadora de Autocovarianzas

Esta función permite obtener funciones de autocovarianzas para modelos multiplicativos estacionales.

Dada la sucesión de autocovarianzas $\{Y_t\}$, la función generadora de autocovarianzas viene a ser (GUERRERO: 2003)

$$Y(B)=\sum_{k=\infty}^{\infty}Y_kB^k \qquad (5)$$

En donde la autocovarianza de orden k se obtiene como coeficiente tanto de B^k como B^{-k}

Sea el modelo:

$$\phi(B)\phi_s\left(B^s\right)\nabla^d\nabla_s^D\left(T(Z_t)-\mu_t\right)=\theta(B)\theta_s\left(B^s\right)\mathrm{a}_t \qquad (6)$$

Originado por el producto de los siguientes procesos:

$$\phi_s\left(B^s\right)\nabla_s^D\left(T(Z_t)-\mu_T\right)=\theta_s\left(B^s\right)\alpha_t \qquad (7)$$

Donde $\mu_T = E(T(Z_t))$, con función de autocovarianza $Y_1(B^s)$ y el proceso

$$\phi(B)\nabla^d \alpha_t = \theta(B)\mathrm{a}_t \qquad (8)$$

Con función de autocovarianza $Y_2(B)$ y a_t proceso de ruido blanco.

Entonces el modelo multiplicativo estacional definido en (6) tiene como función de autocovarianzas a:

$$Y(B) = Y_1(B^s)Y_2(B) \qquad (9)$$

Por ser independientes los procesos.

Reemplazando $Y_1(B^s)$ y $Y_2(B)$ como funciones de autocovarianzas similares a (3.18) se tiene:

$$Y(B) = \left(\sum_{k=\infty}^{\infty} Y_1, k_s B^k\right)\left(\sum_{k=\infty}^{\infty} Y_2, B^k\right) \qquad (10)$$

De (10) se puede obtener la varianza y las autocovarianzas del proceso multiplicativo definido dado en (6).

$$Y_0 = Y_{1,0}\ Y_{2,0} + 2\sum_{i=1}^{\infty} Y_{1,1s}\ \mathrm{Y}_{2,\mathrm{is}}$$

$$Y_k = Y_{1,0}\ Y_{2,k} + \sum_{i=1}^{\infty} Y_{1,is}\left(Y_{2,is-k} + Y_{2,is+k}\right) \quad K \neq 0, s, 2s, \ldots$$

$$Y_s = \sum_{i=0}^{\infty}\left(Y_{1,(i+1)s}\ Y_{2,is} + Y_{1,is}\ Y_{2,(i+1)s}\right)$$

$$Y_{2s} = Y_{1,s}Y_{2,s} + \sum_{i=0}^{\infty}\left(Y_{1,(i+2)s}Y_{2,s} + Y_{1,is}\ Y_{2,(i+2)s}\right)$$

2.2. Verificación de Supuestos

Para la verificación de una serie de supuestos que deben cumplir los residuales, en el ajuste de un modelo multiplicativo estacional se deben calcular los siguientes estadísticos, los cuales permitirán determinar si alguna de las hipótesis se está violando.

Hipótesis Primera

Los a_t tienen media cero y varianza constante:

Para probar determinar:

$$m(\hat{\mathrm{a}}) = \sum_{t=t'}^{N}\left(\hat{\mathrm{a}}_t / \left(N - d - p - (D+P)s\right)\right) \qquad (11)$$

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{a}}^2 = \sum_{t=t'}^{N}\left(\hat{\mathrm{a}}_t - m(\hat{\mathrm{a}})\right)^2 / \left(N - d - p - q - (D+P+Q)s\right)$$

Donde $t' = d + p + (D+P)s + 1$

La media de los residuales se dirá que es significativamente diferente de cero con un 95% de confianza si:

$$\frac{\{N - d - p - (D+P)s\}^{1/2} m(\hat{\mathrm{a}})}{\hat{\sigma}_{\mathrm{a}}} \geq 2$$

Y para verificar que los a_t tienen varianza constante, se debe graficar la serie de los residuales en función al tiempo.

Hipótesis Segunda

Los a_t son mutuamente independientes. Para probar determinar: la función de autocorrelación de los residuos.

$$r_k(\hat{\mathrm{a}}) = \frac{\sum_{t=t'}^{N-k} \hat{\mathrm{a}}_t \hat{\mathrm{a}}_{t+k}}{\sum_{t=t'}^{N-k} \hat{\mathrm{a}}_t^2} \qquad \text{Con k=1, 2,3,…}$$

$$Var(r_k(\hat{\mathrm{a}})) = 1/\left(N - d - p - (D+P)s\right) \qquad (12)$$

Con un 95% de confianza se puede afirmar que la autocorrelación para un rezago de k-ésimo es significativamente diferente de cero sí:

$$|r_k(\mathrm{a})| \geq 2\left\{\mathrm{var}(r_k(\hat{\mathrm{a}}))^{\frac{1}{2}}\right\}$$

IETA

El test simultáneo de Pormenteau, para modelos estacionales multiplicativos lo presenta Jung y Box (BOX – JENKINS: 1970).

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$$
$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \neq \ldots \neq \rho_m \neq 0$$

$$Q' = \left(N - d - p - (D + P)s + 2\right)*$$

$$\sum r_k^{\,2}(\hat{a}) / \left(N - d - p - (D + P)s + k\right) \qquad (13)$$

El cual se distribuye asintóticamente según una distribución J_i cuadrado

$$\chi^2\left(m - p - q - P - Q\right) \qquad (14)$$

Si Q' calculado supera el teórico de tablas dado, entonces podrá rechazarse la hipótesis nula.

3. Bibliografía

[1] Box, G. E. P. Jenkins, G. M. "Time Series Analysis, Forecasting and Control", Holden – Day; San Francisco. 1970

[2] Fernández – Corugedo "Curso Modelos Macroeconómicos para la Política Monetaria" Banco Central de la República de Argentina, Mimeo – Argentina, 2003

[3] Guerrero Víctor M. "Análisis Estadístico De Series De Tiempo Económicas"; Universidad Autónoma Metropolitana; México. 1991

[4] Hamilton, James D. "Time Series Analysis"; Princeton University Press; Princeton. 1994

[5] Harvey A. C. "The Econometric Analysis of Time Series"; Mit Press; Cambridge, Mass. 1990

"El muestreo no es la simple sustitución de una cobertura parcial para una cobertura total. Muestreo es la ciencia y el arte de controlar y medir la fiabilidad de la información estadística útil a través de la teoría de la probabilidad"
Deming (1950).