El Modelo de Vectores Autorregresivos VAR

Autor: M.Sc. Nicolas Chavez Quisbert

1. Introducción a los Procesos Multivariados Autorregresivos

Los modelos autorregresivos fueron planteados inicialmente por Christopher Sims en un artículo publicado en 1980 en ECONOMETRICA, bajo el título de "Macroeconomía y la Realidad"

En el modelo VAR todas las variables son consideradas como endógenas, pues cada una de ellas se expresa como una función lineal de sus propios valores rezagados y de los valores rezagados de las restantes variables del modelo. Lo anterior permite capturar más apropiadamente los conocimientos de las variables y la dinámica de sus interrelaciones de corto plazo, lo cual no es detectable con modelos univariantes como los ARIMA. El VAR es también una técnica poderosa para generar pronósticos confiables en el corto plazo, aunque se le señalan ciertas limitaciones[1].

2. Proceso Multivariado Autorregresivo de orden p con intercepto VAR (p)

Definición.- Sea $\{\mu_t\}$ un proceso de ruido blanco multivariado con vector de medias $E(\mu_t)=0$ y matriz de varianzas y covarianzas Σ_μ, entonces un vector $\{Y_t\}$ se dice que es un proceso multivariado autorregresivo de orden p con intercepto, si: [LUTKEPOHL: 1991].

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots\ldots + \phi_p Y_{t-p} + \mu_t \qquad (1)$$

para

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

donde:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ . \\ . \\ . \\ Y_{Kt} \end{bmatrix}$$

Es un vector de orden K × 1 de variables aleatorias.

Donde ϕ_i es una matriz de coeficiente o parámetros autorregresivos de orden K × K para (i=1, 2, 3,……………, p denominados mecanismos de propagación del modelo).

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_K \end{bmatrix}$$

Vector de términos interceptos de orden K × 1 existe siempre que $E(Y_t) \neq 0$

[1] Entre otros problemas, los VAR omiten la probabilidad de considerar relaciones no lineales entre las variables y no se toma en cuenta problemas de heterocedasticidad condicional ni cambio estructural en los parámetros estimados.

$$\mu_t = \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{Kt} \end{bmatrix}$$

Es el vector K dimensional de proceso de innovación o de ruido blanco multivariado.

Análisis del Vector de constantes C de interceptos

En el caso en que el proceso multivariado Y_t tiene un vector de medias μ constante se tiene que:

$$E(Y_t) = \mu$$

Por lo tanto el modelo definido en (1) se puede denotar en función del polinomio de retraso multivariante como:

$$(I_K - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - .... - \phi_p B^p)Y_t = C + \mu_t$$

Aplicando esperanzas matemáticas a la expresión anterior se tiene que:

$$C = (I_K - \phi_1 - \phi_2 - .... - \phi_p)\mu$$

Lo cual implica que la ecuación (1) es equivalente a;

$$Y_t = (I_K - \phi_1 - .... - \phi_p)\mu + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \mu_t$$

Si $E(Y_t) = 0$ se tiene el modelo reducido sin intercepto:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \mu_t$$

3. Proceso Multivariado Autorregresivo de orden p sin intercepto VAR (p)

Definición.- Sea $\{\mu_t\}$ un proceso de ruido blanco multivariado con vector de medias $E(\mu_t) = 0$ y matriz de varianzas y covarianzas Σ_μ, entonces un vector $\{Y_t\}$ se dice que es un proceso multivariado autoregresivo de orden p sin intercepto si $E(Y_t) = 0$, y este se define de la siguiente manera:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \mu_t \quad (2)$$

El cual puede escribirse en las siguientes formas equivalentes:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - .... - \phi_p Y_{t-p} = \mu_t \quad (3)$$

$$(I_K - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - .... - \phi_p B^p)Y_t = \mu_t \quad (4)$$

donde:

$$\phi(B) = I_K - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - .... - \phi_p B^p$$

Se denomina polinomio autorregresivo multivariado y μ_t es un proceso de ruido blanco multivariado.

Estacionariedad

El proceso autorregresivo multivariado definido en (4) es estacionario, si las raíces de la ecuación característica del polinomio de retraso multivariante en x.

$$\left| I_K - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - .... - \phi_p x^p \right| \quad (5)$$

4. Estimación de parámetros iniciales de un modelo VAR (p)

Definición.- Dado el modelo autorregresivo VAR (p) definido en (1).

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \mu_t \quad (6)$$

Donde C es vector de parámetros interceptos o constantes μ_t es un proceso de ruido blanco multivariado.

Si se definen los vectores:

$$W_t = \left[1 \; Y_{t-1} \;\; Y_{t-2} \ldots\ldots Y_{t-p}\right]' \qquad (7)$$

De orden $(np+1)\times 1$

El número 1 correspondiente a la constante de cada ecuación del modelo VAR.

y

$$\Pi = \left[C\phi_1\phi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \phi_p\right] \quad (8)$$

de orden $\left[n\times(np+1)\right]$

Donde $Y_{t-1}, \ldots\ldots\ldots, Y_{t-p+1}$, se distribuyen normales y la combinación lineal de dichas variables se distribuye según una normal multivariada.

Entonces

$$Y_t / Y_{t-1} Y_{t-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, Y_{t-p+1}$$

Se distribuye según una normal multivariada con vector de medias ΠW y matriz de varianzas y covarianzas Σ_μ, es decir $N\left(\Pi W, \sum_\mu\right)$ la función condicional de la t – esima observación es:

$$fY_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots Y_1\left(y_t / y_{t-1} y_{t-2}, \ldots, y_1, \vartheta\right) \qquad (9)$$

$$= (2\Pi)^{-n/2} \left|\sum{}^{-1}\right|^{1/2} Exp\left[-1/2 (Y_t - \Pi W_t)' \sum{}_\mu^{-1} (Y_t - \Pi W_t)\right] \qquad (10)$$

Donde ϑ es un vector que tiene como elementos a las matrices C, ϕ_1, ϕ_2, ………,ϕ_p y Σ_μ . La función de verosimilitud para la estimación de T periodos se define como:

$$L_{Y_t, Y_{T-1}, \ldots Y_1 / Y_0, Y_{-1}, \ldots Y_{-p+1}}\left(y_t, y_{t-1}, \ldots y_1 / y_0, y_1, \ldots, y_{-p+1} \vartheta\right)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} (2\Pi)^{-n/2} \left|\sum{}_\mu^{-1}\right|^{1/2} \left[Exp - 1/2 (Y_t - \Pi W_t)' \sum{}_\mu^{-1} (Y_t - \Pi W_t)\right] \qquad (11)$$

Abreviando la notación y aplicando logaritmos neperiano para linealizar la ecuación (11) se tiene que.

$$\ln L\left(\Pi, \sum{}_\mu\right) = -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) + \frac{T}{2}\ln\left|\sum{}_\mu^{-1}\right| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \Pi W_t)' \sum{}_\mu^{-1} (Y_t - \Pi W_t) \qquad (12)$$

Estimación del Vector Π

Derivando (12) con respecto del vector Π se tiene que:

$$\frac{\partial \ln L\left(\Pi, \sum_\mu\right)}{\partial \Pi} = \left[-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[(Y_t - \Pi W_t)' \sum{}_\mu^{-1} (Y_t - \Pi W_t)\right]\right]' = 0 \qquad (13)$$

Derivando parcialmente por regla de la cadena con respecto a Π[2].

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} 2 \sum{}_\mu^{-1} (Y_t - \Pi W_t)(-W_t') = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} Y_t W_t' - \sum_{t=1}^{T} \Pi W_t W_t' = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \Pi W_t W_t' = \sum_{t=1}^{T} Y_t W_t'$$

$$\Pi \sum_{t=1}^{T} W_t W_t' = \sum_{t=0}^{T} Y_t W_t'$$

$$\hat{\Pi} = \left[\sum_{t=0}^{T} Y_t W_t'\right]\left[\sum_{t=0}^{T} W_t W_t'\right]^{-1} \qquad (14)$$

---

[2] Si A es una matriz simétrica y $X^t AX$ es una forma cuadrática, la derivada parcial con respecto a X es $\dfrac{\partial\left(X'AX\right)}{\partial X} = 2AX$

Dicho estimador inicial es el de mínimos cuadrados ordinarios [DOORNIK: 1994].

Estimación de Σ_μ

Derivando (12) con respecto Σ_μ por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{\partial \ln(\Pi, \sum_\mu)}{\partial \sum_\mu} = \frac{T}{2}\frac{\partial \ln\left|\sum_\mu^{-1}\right|}{\partial\left|\sum_\mu^{-1}\right|} - \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}\frac{\partial(\hat{\mu}_t' \sum_\mu^{-1} \mu_t)}{\partial \sum_\mu^{-1}} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{T}{2}\sum{}_\mu - \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}\hat{\mu}'\hat{\mu} = 0$$

$$\hat{\sum}_\mu = \frac{\sum_{t=0}^{T}\hat{\mu}_t'\mu_t}{T} = \frac{\sum_{t=0}^{T}\mu_{it}^2}{T} \tag{16}$$

Dicho estimador representa al error cuadrático medio de la regresión para la i – esima variable [DOORNIK: 1994].

5. Bibliografía

[1] *Amisano, Gianni & Giannini, Carlo*. Topies in Structural Var Econometrics. Second Edition, Springer, 1997

[2] *Doornik, J. A. & Hansen*, H. "An Omnibus Test For Univariante And Multivariante Normality". Nuffield College, Oxford, 1994

[3] *Fernandez – Corugedo* "Curso Modelos Macroeconómicos para la Política Monetaria" Banco Central de la República de Argentina, Mimeo – Argentina , 2003

[4] *Hamilton, James D.* "Time Series Analysis"; Princeton University Press; Princeton. 1994

[5] *Harvey A. C.* "The Econometric Analysis Of Time Series"; Mit Press; Cambridge, Mass. 1990

[6] *Lutkepohl, H.* "Introduction To Multiple Time Series Analysis"; Springer-Verlag. Heildelgerg. Second Edition, 1991

[7] *Maddala, G. S.* "Econometrics"; McGRAW – Hill ; New York. 1990

Índice

"Los fundamentos de la estadística están cambiando, no sólo en el sentido en que ellos fueron y continuarán evolucionando, sino también en el sentido idiomático de que ningún sistema es absolutamente estable."

L. J. Savage