



MODELOS ASIMETRICOS EN SERIES DE TIEMPO

Juan Carlos Flores

Los modelos ARCH, GARCH, EGARCH están diseñados para modelar y predecir la varianza de una variable dependiente. En cada caso la varianza de la variable dependiente esta especificada para depender de valores pasados de la variable dependiente usando formulas de variables exógenas o independientes.

1. Modelo ARCH

Consideremos el modelo AR un proceso auto regresivo de orden p de una variable Y_t esta dado por

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \dots \dots \dots \phi_p Y_{t-p} + \mu_t \quad (1.1)$$

μ_t , es un ruido blanco, es decir $E(\mu_t) = 0$ y

$$E(\mu_t, \mu_T) = \begin{cases} \sigma^2; \forall t = T \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (1.2)$$

este proceso tiene covarianza estacionaria, tal que las raíces de

$$1 - \phi_1 z + \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

están fuera del circulo unitario.

Aunque (1.2) la varianza no condicional de μ_t es la constante σ^2 , la varianza condicional de μ_t puede cambiar con el tiempo. Un acercamiento es describir el cuadrado de μ_t como un proceso AR(m):

$$u_t^2 = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 + \omega_t \quad (1.3)$$

donde w_t es un nuevo ruido blanco $E(w_t) = 0$

$$E(\omega_t, \omega_T) = \begin{cases} \lambda^2; \forall t = T \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

donde u_t es el error de la predicción Y_t la expresión (1.3) implica que las proyecciones lineales de los errores al cuadrado de la estimación de Y_t en el anterior p-esimo error cuadrado estimado, esta dado por

$$E(\mu_t^2 / \mu_{t-1}^2, \mu_{t-2}^2, \dots) = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \quad (1.4)$$

y un proceso ruido blanco μ_t que satisface (1.3) es descrito como un proceso autoregresivo condicional heterocedastico de orden m, denotado por $\mu_t \approx ARCH(m)$ estudiado y premio Nobel por Engle.



Es a menudo conveniente usar una representación alternativa para un proceso ARCH(m) proceso que impone las suposiciones ligeramente más fuertes sobre la dependencia de serie μ_t . Puesto que

$$\mu_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t \quad (1.5)$$

donde $\{v_t\}$ son independientes e idénticamente distribuidas, la sucesión con media cero y varianza unitaria. $E(v_t) = 0$ $E(v_t^2) = 1$ si h_t evoluciona según

$$h_t = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \quad (1.6)$$

entonces, implica que

$$E(\mu_t^2 / \mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \dots) = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \quad (1.7)$$

Como μ_t esta generado por (1.5) y (1.6), entonces μ_t sigue un modelo ARCH(m) en la proyección lineal (1.4) que es también una esperanza condicional.

2. Modelo GARCH

Consideremos $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ donde v_t es i.i.d. con media cero y varianza unitaria donde h_t se desarrolla como

$$u_t = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2$$

En forma general, podemos imaginar un proceso para el cual la varianza condicional dependa de un número infinito de rezagos μ_{t-j}^2

$$h_t = \zeta + \pi(L) \mu_t^2 \quad (2.1)$$

donde

$$\pi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j L^j$$

Una idea natural es dar parámetros $\pi(L)$ como el cociente de dos polinomios de orden finito

$$\pi(L) = \frac{\alpha(L)}{1 - \delta(L)} = \frac{\alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_m L^m}{1 - \delta_1 L^1 - \delta_2 L^2 - \dots - \delta_r L^r} \quad (2.1)$$

donde asumimos que las raíces de $1 - \delta(z) = 0$ están fuera del círculo de la unitario.

Si (2.2) es multiplicado por $1 - \delta(L)$, el resultado es

$$[1 - \delta(L)]h_t = [1 - \delta(1)]\zeta + \alpha(L)u_t^2$$

$$O \quad h_t = k + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \dots + \delta_r h_{t-r} + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \quad (2.3)$$



para $k \equiv [1 - \delta_1 - \delta_2 - \dots - \delta_r]\zeta$, la Expresión (2.3) es el modelo GARCH(r, m) de u_t , propuesto por Bollerslev (1986).

3. Modelo EGARCH

Considerando $u_t = \sqrt{h_t} v_t$, donde es i.i.d y v_t con media cero y varianza unidad, Nelson (1991) propuso siguiente modelo de la evolución de la varianza condicional de u_t

$$\log h_t = \zeta + \sum_{j=1}^x \pi_j \{ |v_{t-1}| + E|v_{t-1}| + Xv_{t-1} \}$$

El modelo de Nelson se refiere al modelo GARCH exponencial, o EGARCH. Sí $\pi_t > 0$, el modelo de Nelson implica que una desviación $|v_{t-j}|$ de su valor esperado hace que la varianza de u_t , para ser más grande, un efecto similar a la idea de la especificación de GARCH.

Una parametrización natural es modelar $\pi(L)$ como el cociente de dos polinomios de orden finito como en la especificación de GARCH (r, m):

$$\begin{aligned} \log h_t = & k + \delta_1 \log h_{t-1} + \delta_2 \log h_{t-2} + \dots \\ & + \delta_r \log h_{t-r} + \alpha_1 \{ |v_{t-1}| - E|v_{t-1}| + Xv_{t-1} \} \\ & + \alpha_2 \{ |v_{t-2}| - E|v_{t-2}| + Xv_{t-2} \} + \dots \\ & + \alpha_m \{ |v_{t-m}| - E|v_{t-m}| + Xv_{t-m} \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

El modelo de EGARCH se puede estimar por la máxima verosimilitud, especificando una densidad para v_t . Nelson propuso el usar de la distribución generalizada del error, normalizada para tener variación cero del medio y varianza unidad:

$$f(v_t) = \frac{v \exp[-(1/2)|v_t/\lambda|^v]}{\lambda \cdot 2^{(v+1)v} \Gamma(1/v)} \quad (3.2)$$

Aquí $\Gamma(\bullet)$ está la función gamma, A es una constante dada como

$$\lambda = \left\{ \frac{2^{(v)} \Gamma(1/v)}{\Gamma(3/v)} \right\}^{1/2}$$

y v es un parámetro positivo. Para $v = 2$, la constante $\lambda = 1$ y la expresión (3.2) resulta ser la densidad normal estándar. La esperanza del valor absoluto de v_t , esta dado por

$$E|v_t| = \frac{\lambda 2^{1/v} \Gamma(2/v)}{\Gamma(1/v)}$$

Para el caso de $v = 2$, éste se convierte en

$$E|v_t| = \sqrt{2/\pi}$$



La señorita Pérez comentó que imaginaba que los maridos de la Ciudad de la Paz eran cariñosos y que estaba preparando un cuestionario para circularlo entre los hombres jóvenes de La Paz, para intentarlo averiguar sus preferencias en cuanto al matrimonio.

“pero los paceños no responderán los cuestionarios”, aseguró Luis.

“¿No lo harán?”, preguntó la señorita Pérez decepcionada.

“No”, repuso Luis, “no lo harán. Como país, no importan las encuestas”

N.N.

Cuando la estadística no se basa en cálculos precisos, confunde en vez de guiarnos. La mente se deja llevar fácilmente por la falsa apariencia de exactitud que la estadística mantiene en sus errores, y confiadamente adopta errores escondidos bajo la forma de una verdad matemática.

Alexis de Tocqueville, *Democracy in America*

“Pero los promedios no son reales”, objeto Milo, “sólo son imaginarios”.

“Es posible”, coincidió el niño; sin embargo, el pequeño: “pero a veces son muy útiles. Por ejemplo si no tuvieras dinero, pero estuvieras con otras cuatro personas que contasen con diez dólares cada una, entonces, cada uno de ustedes tendría en promedio ocho dólares, ¿no es así?”.

“Creo que sí”, dijo Milo en voz baja.

“Bueno, piensa en lo bien que te va gracias a los promedios”, dijo convencido el niño y éste continuó con la siguiente explicación: “y piensa en el pobre grangero cuando no ha llovido en todo el año. De no ser por una precipitación anual promedio de 37 pulgadas en esa parte del país, toda su cosecha se perdería”.

Todo esto era muy confuso para Milo, ya que siempre había tenido problemas en la escuela con este tema.

“Hay más ventajas”, continuó el niño, “por ejemplo, si una rata fuese atrapada por nueve gatos, en promedio, cada gato obtendría el 10 por ciento de rata, mientras que ésta obtendría el 90 por ciento de cada gato. Si fueras una rata, verías cómo todo es más agradable”, le dijo el niño a Milo de forma irónica.

Norton Jester, *The Phantom Tollbooth*.

