



EL PROCESO GENERAL DE NACIMIENTO Y MUERTE

NICOLAS CHAVEZ QUISBERT

Definición

Sea $\{ N(t) , t \geq 0 \}$ un proceso puntual discreto en el espacio y continuo en el tiempo, tal que cumple los siguientes axiomas:

- 1.- $P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1 / N(t) = n] = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$
- 2.- $P[N(t + \Delta t) - N(t) = -1 / N(t) = n] = \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$
- 3.- $P[N(t + \Delta t) - N(t) = 0 / N(t) = n] = 1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t)$
- 4.- $P[N(t + \Delta t) - N(t) = m / N(t) = n] = o(\Delta t)$ para $m \neq 0, 1, -1$
- 5.- $P[N(0) = n_0] = \delta_{n, n_0}$

donde:

$$\delta_{n, n_0} = \begin{cases} 1 & \text{sí } n = n_0 \\ 0 & \text{sí } n \neq n_0 \end{cases}$$

Donde:

λ_n : Tasa de nacimiento o de llegadas

μ_n : Tasa de muerte o de servicios

Δt : Incremento en el tiempo, infinitesimal.

$o(\Delta t)$: Función del tiempo.

δ_{n, n_0} : Función Delta de Kroneker, donde " n_0 " representa la población en un instante 0.

ECUACIONES DE ESTADO DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) P[N(t + \Delta t) - N(t) = 0 / N(t) = n] + P_{n-1}(t) P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1 / N(t) = n-1] + P_{n+1}(t) P[N(t + \Delta t) - N(t) = -1 / N(t) = n+1] + o(\Delta t)$$

$$= P_n(t) [1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t)] + P_{n-1}(t) [\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)] + P_{n+1}(t) [\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t)$$

$$= P_n(t) - P_n(t) (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + P_{n-1}(t) \lambda_{n-1} \Delta t + P_{n+1}(t) \mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)$$

Aplicando ecuaciones diferenciales a ambos terminos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -P_n(t)(\lambda_n + \mu_n) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + o(\Delta t)$$

$$P_n'(t) = -P_n(t)(\lambda_n + \mu_n) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}$$

Para $n=1,2,3,\dots$ donde $P_n'(t)$ es una ecuación diferencial



$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0 / N(t) = 0] + P_1(t) P[N(t+\Delta t) - N(t) = -1 / N(t) = 1] + 0(\Delta t)$$

$$= P_0(t) [1 - (\lambda_0 + \mu_0) \Delta t + 0(\Delta t)] + P_1(t) [\mu_1 \Delta t + 0(\Delta t)] + 0(\Delta t)$$

$$= P_0(t) - P_0 \lambda_0 \Delta t + P_1(t) \mu_1 (\Delta t) + 0(\Delta t)$$

μ_0 es cero ya que no hay población y por lo tanto no hay quien muera.

Aplicando ecuaciones diferenciales a ambos miembros se tiene:

$$P_0'(t) = -P_0(t)\lambda_0 + P_1(t)\mu_1 \quad \text{para } n = 0$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\lambda_0 + P_1(t)\mu_1 + 0$$

a) Proceso de nacimiento y muerte lineal

Se dan con las siguientes tasas:

$$\lambda_n = n \lambda$$

con λ y μ constantes

$$\mu_n = n \mu$$

b) Proceso de inmigración y muerte lineal

Ocurre con las siguientes tasas:

$$\lambda_n = \lambda$$

con λ constante

$$\mu_n = n \mu$$

c) Proceso de nacimiento lineal y de emigración

Ocurre con la siguientes tasas:

$$\lambda_n = n \lambda$$

con μ constante

$$\mu_n = \mu$$

d) Proceso de inmigración y emigración

Ocurre con la siguiente tasa:

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \mu$$



DISTRIBUCIÓN LÍMITE DE PROBABILIDADES

Si se supone la existencia de distribución límite, tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$$

Por lo que P_n para $n = 0, 1, 2, \dots$, formara una distribución probabilística discreta tal que cumple la siguiente propiedades:

$$1) \quad P_n \geq 0$$

$$2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

De cumplir lo anterior de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n^{(t)} = 0$$

Por que el límite de un escalar es cero

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Aplicando límites al infinito en forma asintótica a las ecuaciones de estado del proceso general de nacimiento y muerte se obtienen las ecuaciones de equilibrio.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$P'_n(t) = -P_n(t) (\mu_n + \lambda_n) + P_{n-1}(t) \lambda_{n-1} + P_{n+1}(t) \mu_{n+1}$$

$$P'_0(t) = -P_0(t) \lambda_0 + P_1(t) \mu_1$$

$$0 = -P_n (\mu_n + \lambda_n) + P_{n-1}(t) \lambda_{n-1} + P_{n+1}(t) \mu_{n+1}$$

$$0 = -P_0 \lambda_0 + P_1 \mu_1$$

Como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Por ser una función probabilística, la solución del sistema es el siguiente:

$$\text{Para } n=0 \quad 0 = -P_0 \lambda_0 + P_1 \mu_1$$

$$\mu_1 P_1 = P_0 \lambda_0 \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$\text{Para } n=1 \quad 0 = -(\lambda_1 + \mu_1) P_1 + \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$$



$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_1 P_1 - \mu_1 P_1 + \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \\ &= -\lambda_1 P_1 - \lambda_0 P_0 + \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \\ &= \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 \end{aligned}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right) P_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

Por ser p_n una función probabilística se tiene que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad \text{aplicando sumatoria al infinito.}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)}$$

Se obtiene la probabilidad de que el sistema este vacío, para que exista dicha probabilidad, la sumatoria del denominador debe converger.

Para que esto ocurra S debe ser finito.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right) < \infty$$

Para el proceso de inmigración y emigración con tasa $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$ dicha sumatoria se reduce a:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda \lambda \dots \lambda}{\mu \mu \dots \mu} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\text{que converja } a = \begin{cases} \frac{1}{1 - \lambda/\mu} \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| < 1 \\ \infty \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \geq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto se garantiza la existencia de distribución límite de probabilidades, siempre que la tasa de nacimiento o llegada " λ " sea menor a la tasa de muerte o servicio " μ " es decir $\lambda < \mu$



BIBLIOGRAFIA

KARLIN SAMUEL, TAYLOR HOWARD M. (1988) , A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES, ACADEMIC PRESS, LONDON.
 NAYARAN BHAT U. (1984) ELEMENTS OF APPLIED STOCHASTIC PROCESSES, JOHN WILEY & SONS CANADA.
 PARZEN EMANUEL (1972) , PROCESOS ESTOCASTICOS, PARANINFO, MADRID.
 PRIESTLEY M. B. (1981), SPECTRAL ANALYSIS AND TIMES SERIES, ACADEMIC PRESS, LONDON.



No tengo muchos recuerdos de ese día, excepto la rapidez de Jonson: al destacar el doctor Beattie que había visto a los carruajes 1 y 1000 (el primero y el último), como si fuera algo notable, Jonson replicó: “¿y eso que?.

Hay la misma posibilidad de ver esos que cualesquier otros dos”. Evidentemente tenía razón, aunque ver los dos extremos (cada uno de los cuales es, en cierto grado, más llamativo que los demás) pueden llamar más la atención que ver cualquier otro par.

James Boswell, The Life of Samuel Johnson

Una de las cosas que ella (mamá) me enseñó debería ser evidente para todos, aunque muchos cocineros aún no se dan cuenta de ello. Prepare primero la comida que tarde más en cocinarse.

Pearl Bailey, La cocina de Pearl