ALTERNATIVAS

Raúl Delgado Álvarez

El objetivo del presente artículo, es el de reforzar el aspecto Psicopedagógico de la solución de ejercicios, la búsqueda de otra manera de resolver un ejercicio o la demostración de un Teorema afianza la destreza en un estudiante, por ello se propone un problema y se exponen dos soluciones y se invita a los lectores hacer llegar otra u otras soluciones.

Problema

Hallar el momento k-ésimo de la distribución T-Student, a partir de dicha expresión hallar el coeficiente de deformación vertical o Curtosis, además evaluar el mismo si "n" (grados de libertad) crece indefinidamente. ¿Que conclusión se puede obtener?

Primera Solución

$E[T^k] = 0$, para k impar, dado que la distribución t-Student es simétrica respecto al eje vertical, luego sólo existe para k par, es decir, $E[T^{2k}]$

Dada la variable $T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}$, como $Z \sim N(0,1)$ y $V \sim \chi_n^2$ siendo además variables aleatorias independientes, entonces:

$$E[T^{2k}] = E\left[\frac{\sqrt{n}Z}{\sqrt{V}}\right]^{2k} = E[n^k Z^{2k} V^{-k}]$$

$E[T^{2k}] = n^k E[Z^{2k}] E[V^{-k}]$ (1)

Hallando; $E[Z^{2k}]$:

$E[Z^{2k}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Z^{2k} e^{-\frac{2}{2}Z^2}$ dz, la expresión subintegral es función par, luego:

$2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Z^{2k} e^{-\frac{2}{2}Z^2}$ dz, haciendo el cambio de variable $u = \frac{z^2}{2}$ du = zdz

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} (\sqrt{2u})^{2k-1}\, e^{-u}\, du = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^{(k+\frac{1}{2})-1}\, e^{-u}\, du$$

$E[Z^{2k}] = \frac{2^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$ (2)

Hallando: E [V^{-k}]:

$E[V^{-k}] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} v^{-k} v^{\frac{h}{2}-1}\, e^{-\frac{v}{2}}$ dv, Sea el cambio de variable; $h = \frac{v}{2}\ V\, , dh\ = \frac{1}{2}dv$

los límites de integración no se modifican, luego:

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, 2^{\frac{n}{2}-k}\int_0^{\infty} h^{(\frac{n}{2}-k)-1}\, e^{-h}\ \mathrm{dh}$$

$$\mathrm{E}\ [V^{-k}] = \frac{2^{-k}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Gamma(\tfrac{n}{2}-k) \quad (3)$$

De (2) y (3) en (1), se tiene: E [T^{2k}] = n^k E [Z^{2k}]E [V^{-k}]

$$= n^k\, \frac{2^k\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\, \frac{2^{-k}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Gamma(\tfrac{n}{2}-k)$$

$$\mathrm{E}\ [T^{2k}] = n^k\, \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (4)$$

Segunda Solución:

Hallando directamente el momento k-ésimo:

E [T^k] = 0, cuando k es impar por simetría, luego sólo existe para k par, es decir:

$$E[T^{2k}] = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}(1+\frac{t^2}{n})dt$$, siendo la expresión subintegral función par:

$$= 2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{o}^{\infty} t^{2k}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dt$$, Haciendo el cambio de variable: $Z = \frac{t}{\sqrt{n}}$

$$= 2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{o}^{\infty} (\sqrt{n}\,z)^{2k}(1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{n}dz$$

$$= 2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} n^{k+\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} z^{2k}(1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}} dz$$

Como la expresión subintegral, contiene suma de cuadrados, haciendo: $z = tag\,\theta$, se tiene: Si z = 0, entonces, $tag\,\theta = 0$, con lo cual $\theta = 0$. Cuando $z \to \infty,\ tag\,\theta \to \infty, \theta = \frac{\pi}{2}$

También: $dz = sec^2\theta\, d\theta$, con lo cuál:

$$=2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} n^{k+\frac{1}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (tag\,\theta)^{2k}(1+tag^2\theta)^{-\frac{n+1}{2}} sec^2\theta\, d\theta$$, utilizando identidades trigonométricas:

$$=2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} n^{k+\frac{1}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (tag\,\theta)^{2k}(sec^2\theta)^{\frac{1-n}{2}} d\theta ,$$

$$=2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} n^{k+\frac{1}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sen\,\theta)^{2k}(\cos\theta)^{n-1-2k} d\theta$$, escribiendo los exponentes como: $2k = 2(\frac{2k+1}{2})-1$, $n-1-2k = 2(\frac{n-2k}{2})-1$

$$= 2 \quad \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \, n^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\,\theta)^{2\frac{(2k+1)}{2}-1} \, (cos\,\theta)^{2\left(\frac{n-2k}{2}\right)-1} d\theta$$

, considerando una de las expresiones de la función Beta: $\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\,\theta)^{2p-1}\,(cos\,\theta)^{2q-1} d\theta$ además:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} n^k \, \beta\left(\frac{2k+1}{2}; \frac{n-2k}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} n^k \, \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$ Simplificando:

$E[T^{2k}] = n^k \dfrac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$ como la ecuación (4)

El momento de k-ésimo orden es

$E\,[T^{2k}] = n^k \dfrac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$, k=1,2,...

$E\,[T^2] = \dfrac{n\Gamma(1+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} = \dfrac{n(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\sqrt{\pi}(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)} = \dfrac{n}{n-2}$, cuando k=1

$E[T^4] = \dfrac{n\Gamma(2+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} = \dfrac{\cdot n(1+\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-2)}{\sqrt{\pi}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\Gamma(\frac{n}{2}-2)} = \dfrac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$, cuando k=2

Luego la Curtosis será: $b = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = \dfrac{E(T^4)}{(E(T^2))^2}$ porque E(T) =0 (momento impar)

$$b = \frac{3n^2/(n-2)(n-4)}{n^2/(n-2)^2} = 3\left(\frac{n-2}{n-4}\right)$$

Si n es grande, $\lim_{n\to\infty} 3\frac{(n-2)}{(n-4)} = 3 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-4}\right) = 3\ , b = 3$

Como era de esperarse, ya que cuando n crece, la distribución T-Student converge en distribución a la Normal y en la Normal el coeficiente de Curtosis es b =3.

-----.-----

¿Quién debe ser el jefe?

Cuando se creó el ser humano, todos sus partes querían ser él jefe

El cerebro dijo! Ya que yo controlo esto y pienso por todos, yo debería ser el jefe.

Los pies dijeron: Ya que nosotros transportamos el cuerpo a donde desea el cerebro y le permitimos así hacer lo que el cerebro quiere, nosotros deberíamos ser los jefes.

Las manos dijeron: Ya que nosotros hacemos todo el trabajo y ganamos dinero para mantener todo el cuerpo, nosotros deberíamos ser los jefes.

Y así siguieron el corazón, los ojos, las orejas, y los pulmones.

Por fin habló el ojo del culo, pidió ser el jefe. Las otras partes del cuerpo se echaron a reír ante la idea de que un ojo del culo pudiera ser el jefe.

El ojo del culo montó en cólera, se cerró y se negó a funcionar. Rápidamente el cerebro enfebreció; los ojos se pusieron bizcos y vidriosos; los pies, demasiado débiles para andar; las manos colgaban sin fuerza, el corazón y los pulmones luchaban por sobrevivir.

Entonces todos suplicaron al cerebro que cediera y permitiese al ojo del culo ser jefe. ¡Así se hizo! Todos las otras partes del cuerpo hacían el, trabajo mientras que el ojo del culo las dirigía y se ocupaba, principalmente, de la mierda, como todo jefe digno de este título.

Moraleja: No hace falta ser cerebro para llegar a jefe; un ojo del culo tiene, claramente, más posibilidades

¡Mire a su alrededor para convencerse!

Índice