



PARADOJAS

Raúl Delgado Álvarez

Son problemas en los cuales se llega a resultados contradictorios habiendo seguido caminos diversos de apariencia lógica

LA PARADOJA DE BERTRAND

Problema.

¿Cuál es la probabilidad de que una cuerda dibujada caprichosamente en un círculo sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en dicho círculo?

Primera Solución

El conjunto total de los casos posibles de dibujar una cuerda se agota cuando desde cada uno de los puntos de la circunferencia se traza un recta que vaya a pasar por cada uno de los demás puntos de la curva : cada una de las cuerdas puede ser trazada en dos direcciones.

El conjunto de todos los casos favorables se consigue al unir los puntos de la circunferencia con solo aquellos otros que subtiendan por el lado del arco menor, arcos mayores que $\frac{2\pi}{3}$ también se tomará en

cuenta que este último conjunto se agota dos veces , según se traza la cuerda de un lado u otro del diámetro que pase por el punto considerado. Los puntos a los cuáles se pueden trazar cuerdas favorables desde otro fijo, están situados sobre un arco de magnitud

$$2\pi - 2\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

mientras que los extremos de todas las cuerdas posibles que parten de un punto fijo, pueden ser todos u cada uno de los de la circunferencia 2π . Por lo tanto la probabilidad buscada es igual a

$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

Segunda Solución

En cada uno de los puntos de un diámetro levántese una perpendicular: así se obtiene un sistema de cuerdas paralelas y haciendo lo mismo con todos los diámetros posibles , se obtienen, se obtienen todas las cuerdas posibles. Las cuerdas mayores que el lado del triángulo equilátero inscrito se obtendrán levantando perpendiculares a todos los diámetros posibles en los puntos de él situados entre el centro y el punto medio del radio. Puesto que el conjunto de todos los puntos comprendidos entre el centro y dicho punto medio es la mitad del de los puntos que hay en el radio, se deduce que la probabilidad de que una cuerda dibujada a capricho sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito, es igual a $1/2$.

Tercera Solución

La posición de una cuerda que queda determinada unívocamente por la de su punto medio, y por los puntos medios de todas las cuerdas posibles que llenan , la superficie circular. Según esto la hipótesis de la cuerda trazada por un punto cualquiera puede ser



sustituida por el supuesto de considerar un punto cualquiera del círculo como punto medio de aquella cuerda. La probabilidad de que ésta sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito es equivalente a la probabilidad de que el punto medio de la cuerda supuesta quede dentro de un círculo de radio $\frac{1}{2}r$. El conjunto de los puntos medios de tales cuerdas mayores es $\frac{1}{4}\pi r^2$, mientras que el conjunto de los puntos medios de todas las cuerdas posibles es .por lo cuál la probabilidad buscada es

$$\frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

La diferencia de resultados depende de la incompleta determinación del problema . Se precisa que cuerdas mayores a las de mayor longitud que el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo, y cuerdas menores a las demás. E problema consiste en hallar la relación entre el número de cuerdas mayores y el de todas las cuerdas posibles . Pero puesto que existe un número infinito de cuerdas mayores y menores , el resultado es en principio $\frac{\infty}{\infty}$

Así que el valor de la expresión indeterminada dependerá de a manera como se disponga el aumento de las cuerdas hasta un número ilimitado.

En la primera solución sucede que : el número de puntos de división equidistantes sobre la circunferencia desde los cuáles se trazan las cuerdas que los unen a todos los demás puntos de división , se supone cada vez mayor.

En la segunda solución se admite que las partes iguales en que se ha dividido todo

diámetro, se hacen cada vez menores y por esta razón los pies de las cuerdas perpendiculares al diámetro se van aproximando unos a otros

En la tercera Solución se considera un círculo densamente lleno de puntos, que son los puntos medios de las cuerdas. Describiendo $2m$ círculos concéntricos equidistantes con el de radio r , de radios

$\rho, 2\rho, 3\rho \dots 2m\rho = r$ y sobre las circunferencias de éstos círculos márquese puntos que estén distantes unos de otros, y P tomando esta fracción como unidad de longitud . El número de puntos situados en las circunferencias , desde la primera hasta la de radio $m\rho$ es $\frac{m(m+1)}{2}6$ y hasta la de radio $2m\rho$ $\frac{2m(2m+1)}{2}6$.Cuanto mayor se suponga a m tanto más se aproxima a $1/4$, la relación entre el número de cuerdas mayores y el número de todas ellas expresadas por los valores anteriores halladas.

La disposición de las infinitas cuerdas posibles se supone distinta en las tres soluciones por lo que se han obtenido resultados diferentes

Bibliografía:

Carlos Araujo Notas de Probabilidades CIENES
Enrique Cansado Estadística General
Allyn and Bacon A Survey of Geometry
P.D. Si plantea otra solución háganosla saber