Regresión por Cuantiles

Autor: Univ. Deyvis Nina Canaviri

1. Esperanzas condicionales y Regresión.

Consideremos un modelo lineal simple:

$$y = x\acute{}\beta + u$$

con $E(u|x) = 0$. De modo que:

$$E(y|x) = x\acute{}\beta$$

$x\acute{}\beta$ es una función de regresión, es la esperanza condicional de $\boldsymbol{y}$en $\boldsymbol{x}$.

Trivialmente:

$$\frac{\partial E(y|x)}{\partial x_k} = \beta_k$$

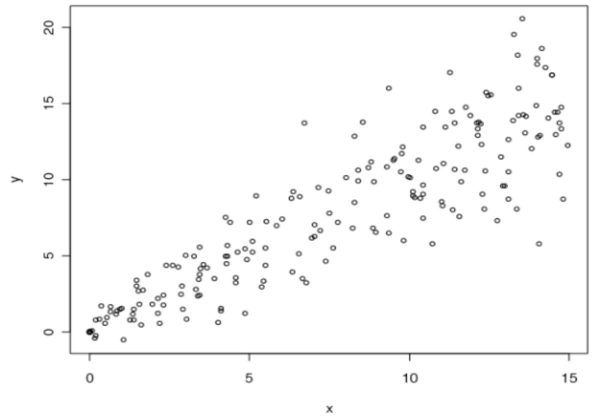
βMide como cambios marginales en $\boldsymbol{x}$ afectan a $E(y|x)$.

Si u es independiente de x, también es cierto que:

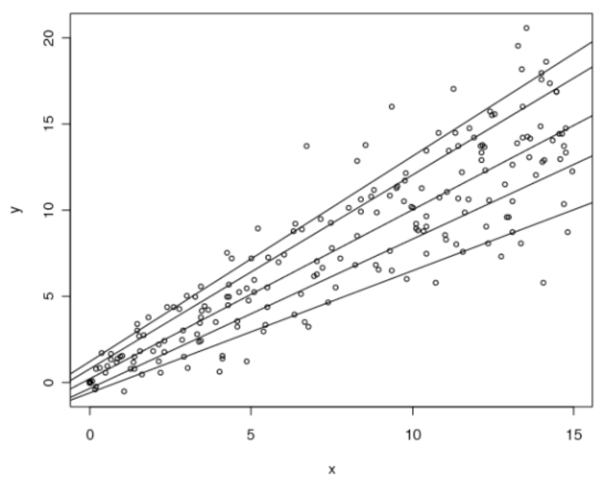
$$\frac{\partial y|}{\partial x} = \beta$$

- La independencia es lo que le da sentido a la idea de "alterar $\boldsymbol{x}$ dejando $\boldsymbol{u}$ constante".
- El efecto de $\boldsymbol{x}$ sobre $E(y|x)$ resume también el efecto de $\boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{y}$.

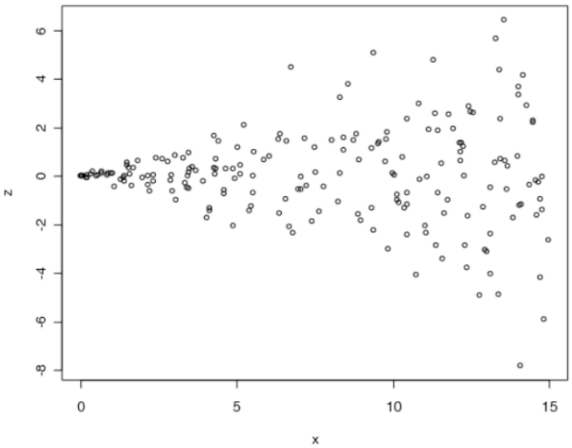
Considerando el siguiente caso de *hetero-cedasticidad*:



- ❖ ¿Cuál es el efecto de $\boldsymbol{x}$sobre $E(y|x)$?
- ❖ ¿Cuál es el efecto de $\boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{y}$?



- ✓ El efecto de $\boldsymbol{x}$ es mayor ***arriba***. El efecto no es *homogéneo*.
- ✓ $\beta = \partial E(y|x)/\partial x$ no resume el ejemplo de $\boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{y}$.
- ❖ ¿Es posible que $\boldsymbol{x}$ no afecte a $E(y|x)$ pero que si a $\boldsymbol{y}$?



$\boldsymbol{x}$ No afecta a $E(y|x)$ pero si afecta a $\boldsymbol{y}$.

2. Regresión por cuantiles.

Intenta modelar el efecto de $\boldsymbol{x}$ sobre toda la distribución de $\boldsymbol{y}$.

Z ~ F (z) continua y monótona.

El τ-esimo cuantil de Z es un número Qz(τ) que satisface:

$$F\big(Qz(\tau)\big) = \tau$$

O sea, el τ-esimo cuantil es un número de la distribución tal que la probabilidad de que ocurran valores menores es τ.

3. ***Cuantiles de la distribución normal estándar***

Recordar que el modelo simple de regresion puede ser visto como:

$$E(y|x) = x\'\beta$$

En forma analoga, el modelo de regresion parea el τ -esimo cuantil de la distribucion de y condicional en x sera:

$$Q_{y|x}(\tau) = x\'\beta(\tau)$$

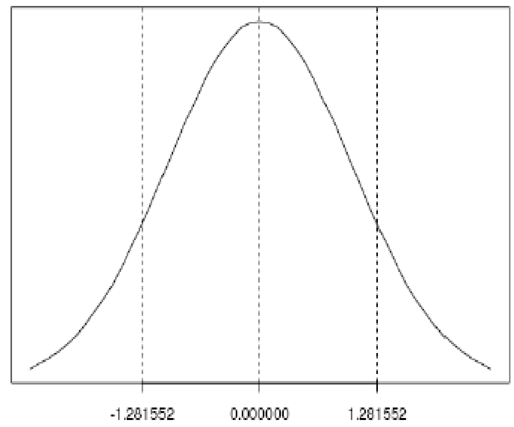
Con:

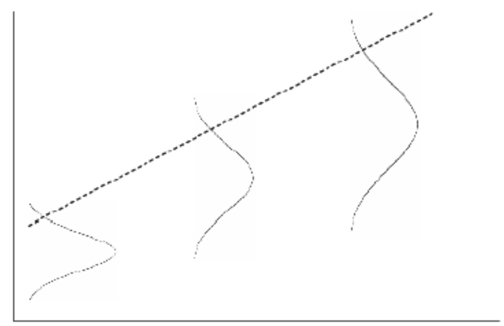
$$\frac{\partial Q_{y|x}(\tau)}{\partial x} = \beta(\tau)$$

Estamos permitiendo que el efecto de x sobre y sea distinto en distintos lugares de la distribucion de y dado x.

Ejemplo:

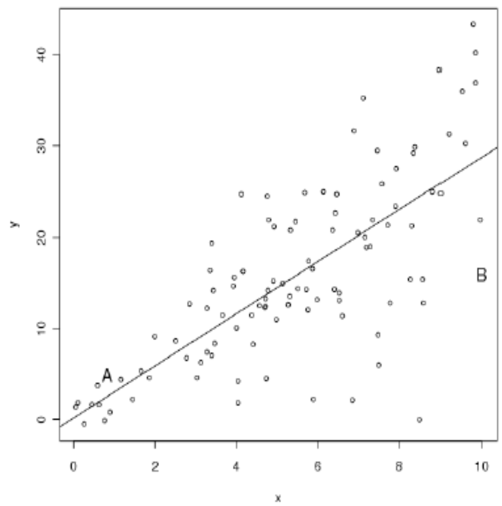
$$Q_{y|x}(0.75) = \beta_0(0.75) + \beta_1(0.75)x$$





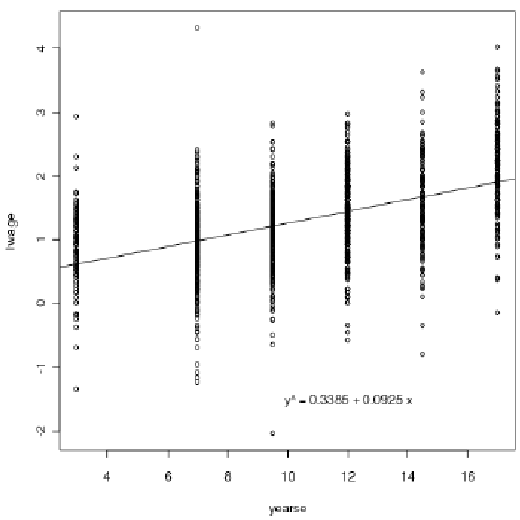
La recta une los Cuantiles 0.75 de cada distribución *condicional.*

Importante:el método estima rectas para distintos lugares de la distribución *condicional* (y no de la no condicional!!!!)



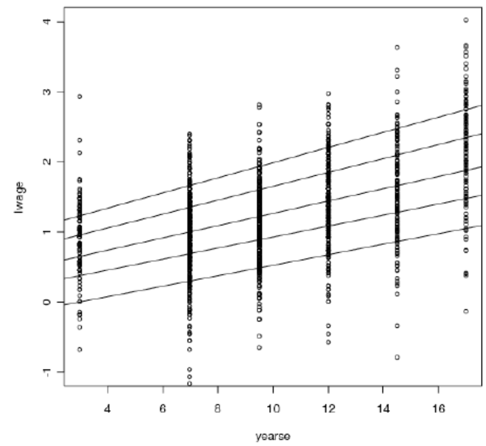
- "A" está arriba de la distribución condicional y abajo en la no condicional.
- "B" está en el medio de la no condicional, y muy abajo en la condicional.

Ejemplo: Retorno a la Educación



- El retorno "medio" es 0.0925

Estimación por quantile regression:



- El retorno es superior en los niveles más altos.

Resumen de resultados:

Cuantiles	intercepto	educacion
0.10	-0.2260	0.0753
0.25	0.1420	0.0787
0.50	0.3841	0.0881
0.75	0.6580	0.0992
0.90	0.9055	0.1083
Retorno medio (MCO)	0.3385	0.0925

Estimación e Inferencia

Mínimos cuadras ordinarios:

$armin\, \Sigma(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$

- La solución es una recta en (X,Y).
- La recta pasa por el medio (los errores son penalizados en forma simétrica).

Koenker y Bassett (1978): la solución al problema pasa por penalizar Asimétricamente los errores de estimación.

$$\hat{\beta}(\tau) = armin \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(y_i - x_i'\beta)$$

Con $\rho_\tau(Z) = z\big(\tau - I(z < 0)\big), \tau \in (0,1),$ produce estimadores consistentes y asintóticamente normales.

- Penaliza a los errores positivos con τ y a los negativos con $1 - \tau$

- Cuando $\tau = 0.5$, mínimos desvíos absolutos, penalización simétrica.

El problema de estimación puede ser reescrito como:

$$\min_{(b(\tau),u,v)\,\in\,\Re\times\Re_+^{2n}} \{\tau 1_n' u + (1-\tau)1_n' v \mid 1_n' b(\tau) + u - v = y\}$$

$e_i \equiv x_i' b(\tau), 1_n$un vector columna de n, u y v son variables de holgura complementaria: es un Programa lineal.

En la Practica estimamos $\hat{\beta}(\tau_i), i = 1, \dots, m$ (coeficientes para m cuantiles)

Denominemos con $\beta(\tau_i)$ a los coeficientes poblacionales y construyamos los siguientes vectores.

- $\hat{\beta} \equiv (\hat{\beta}(\tau_1)' \cdots \hat{\beta}(\tau_m)')'$
- $\beta \equiv (\beta(\tau_1)' \cdots \beta(\tau_m)')'$

4. Inferencia

Bajo el supuesto de que la muestra es independiente (pero no necesariamente idénticamente distribuida) y bajo condiciones de regularidad estándar, es posible mostrar que:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \Lambda)$$

$\Lambda = \Lambda_{j,p},\ j = 1, \dots, m,\ \ p = 1, \dots, m$ con:

$$\Lambda_{j,p} = (\min\{\tau_j, \tau_p\} - \tau_j\tau_p)\ \left(E[f_{\tau_j}(0|x)\ xx']\right)^{-1} E[xx'] \left(E[f_{\tau_j}(0|x)\ xx']\right)^{-1}$$

en donde $f_{\tau_i}(0|\mathrm{x})$ es la función de densidad de y condicional en $x'\beta(\tau_s)$.

Dedicado: A mi Familia y Amigos que siempre me apoyan

Bibliografía:

- Machado , Koenker y Fitzenberger (2001): *Economic Applications of Quantile Regression,* Springer-Verlag, texto de aplicaciones.
- Koenker, R. (2005): *Quantile Regression,* Cambridge University Press

"No perdáis vuestro tiempo ni en llorar el pasado ni en llorar el porvenir. Vivid vuestras horas, vuestros minutos. Las alegrías son como flores que la lluvia mancha y el viento deshoja.".
Miguel de Cervantes Saavedra