

SIMULACIÓN DIGITAL Y COMPRENSIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES, UNA EXPERIENCIA PEDAGÓGICA EN INGENIERÍA

Juan Carlos Quispe Apaza ¹

1. Carrera de Ingeniería Industrial, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia
jcquispe15@umsa.bo | ORCID: 0000-0002-7533-6604

RESUMEN

El presente artículo expone una propuesta de innovación pedagógica orientada a mitigar la desconexión cognitiva y el fenómeno de la "caja negra" en la enseñanza de la diagonalización de matrices dentro de las carreras de ingeniería. El objetivo fundamental es diseñar una secuencia instructiva integrada que unifique la intuición geométrica interactiva con el rigor del cálculo numérico computacional. La metodología empleada adopta un enfoque cualitativo descriptivo basado en un diseño didáctico estructurado en tres momentos de aprendizaje secuenciales: el descubrimiento visual en dos dimensiones mediante el entorno dinámico GeoGebra, la formalización analítica y algorítmica a través de la programación explícita del Método de las Potencias en MATLAB y la escalabilidad de la abstracción matemática hacia sistemas tridimensionales en la misma plataforma científica. Los resultados principales estructuran una matriz de complementariedad didáctica y guías de laboratorio técnico que demuestran cómo la visualización previa de una elipse de deformación cartesiana dota de inmediato significado físico e ingenieril a los bucles e iteraciones abstractas ejecutadas por el ordenador. Se concluye que la articulación coordinada de GeoGebra y MATLAB constituye una alternativa metodológica robusta, viable y de libre réplica para la comunidad universitaria, la cual no sustituye el formalismo analítico tradicional, sino que optimiza el tiempo de aula y fortalece simultáneamente competencias conceptuales, tecnológicas y algorítmicas esenciales en los futuros ingenieros ante escenarios de complejidad real.

Palabras clave: Diagonalización de matrices, innovación pedagógica, simulación digital, GeoGebra, MATLAB.

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal constituye uno de los pilares fundamentales en la formación de los estudiantes de ingeniería, proveyendo el lenguaje matemático necesario para modelar fenómenos físicos,

estructurales y dinámicos, dentro de esta disciplina, la diagonalización de matrices se erige como una herramienta crítica para simplificar sistemas lineales complejos mediante transformaciones de coordenadas; aplicaciones tradicionales de alto impacto como el análisis de vibraciones estructurales, la mecánica de fluidos y los sistemas de potencia eléctrica dependen directamente del cálculo de autovalores y autovectores, en los campos emergentes de las telecomunicaciones y la ciencia de datos, la descomposición en autovalores de matrices asociadas a redes se ha vuelto indispensable para el procesamiento de señales, donde los autovectores actúan como una base espectral para el análisis de información interconectada (Candilejo Egea, 2026).

La enseñanza tradicional de la diagonalización suele centrarse de forma desproporcionada en la manipulación operativa y abstracta de ecuaciones, determinantes y polinomios característicos, este enfoque algorítmico e intensivo en álgebra frecuentemente desvincula al estudiante del significado geométrico subyacente, como advierte Suñagua (2016), si la fundamentación conceptual no está plenamente asimilada, el uso de métodos matemáticos o de herramientas de software corre el riesgo de convertirse en una mera "caja negra", que arroja resultados numéricos aislados a partir de ciertos datos de entrada, sin que el futuro ingeniero comprenda la transformación espacial que está ocurriendo. Este fenómeno es ampliamente estudiado en la didáctica del cálculo, Buchberger (1989) postula el principio de la caja negra, afirmando que el uso de herramientas computacionales solo es epistemológicamente válido si el alumno comprende los fundamentos internos del proceso antes de delegarle la carga operativa al software.

Para mitigar esta desconexión cognitiva, el presente artículo expone una propuesta de innovación pedagógica estructurada para la enseñanza de la diagonalización de matrices en carreras de ingeniería, la estrategia propuesta articula el uso de dos herramientas tecnológicas complementarias, el GeoGebra, como un entorno dinámico de visualización geométrica interactiva en dos dimensiones $\mathbb{R}^2$ y MATLAB como una plataforma de cómputo científico de alto rendimiento para el rigor algorítmico y la escalabilidad tridimensional en $\mathbb{R}^3$, a través de este diseño didáctico bidireccional, se busca guiar al estudiante desde la intuición visual intuitiva hasta la automatización numérica rigurosa.

La desconexión entre la destreza analítica y la comprensión geométrica de las transformaciones lineales genera una barrera en la capacidad de los estudiantes para transferir el conocimiento matemático a la resolución de problemas de diseño o análisis en ingeniería, conceptos esenciales como la deformación espacial, los ejes principales de tensión o la invarianza direccional de los autovectores se pierden detrás de una secuencia mecánica de cálculos matriciales manuscritos, propensos a errores aritméticos y que consumen un tiempo valioso dentro del aula.

La pertinencia de esta propuesta radica en que no aboga por la sustitución del rigor matemático, sino por su enriquecimiento a través de la simulación digital, el uso secuencial de GeoGebra y MATLAB ataca directamente las debilidades del modelo pedagógico tradicional. En un primer momento, GeoGebra permite que el estudiante interactúe directamente con objetos geométricos en tiempo real, transformando, por ejemplo, un círculo unitario en una elipse mediante la acción de una matriz de 2×2 , esta visualización dinámica convierte los conceptos abstractos de autovalores y autovectores en fenómenos observables, vectores que preservan su dirección lineal y los factores de escala (autovalores) que representan el estiramiento o compresión del espacio. En un segundo momento, la transición hacia MATLAB dota al estudiante de la capacidad de programar y automatizar los algoritmos correspondientes, tales como los métodos iterativos de cálculo numérico fundamentales en la práctica profesional. Esta sinergia tecnológica fomenta un aprendizaje significativo al unificar las dimensiones visual, algebraica y algorítmica del álgebra lineal, al proponer este diseño instructivo de forma estructurada, se ofrece una metodología de libre réplica para los docentes del sistema universitario, alineada con las demandas actuales de la educación en ingeniería que exigen el desarrollo de competencias tanto analíticas como tecnológicas.

2. METODOLOGÍA

Desde una perspectiva psicopedagógica, el diseño de esta secuencia didáctica no se limita a la mera introducción de herramientas informáticas en el aula; por el contrario, se fundamenta en los principios de la psicología cognitiva aplicados al software educativo, como señalan Velásquez et al. (1977), los entornos digitales interactivos que resguardan la usabilidad operan como potentes formatos de mediación y andamiaje cognitivo que favorecen la reorganización de los sistemas de pensamiento del usuario, bajo este enfoque, la interfaz visual de GeoGebra y el entorno algorítmico de MATLAB actúan como un soporte externo y estructurado que dinamiza la zona de desarrollo próximo del estudiante de ingeniería, facilitando el traspaso de competencias conceptuales complejas, como la interpretación geométrica de los autovectores antes de que el alumno deba enfrentarse a la rigidez del cálculo analítico abstracto.

El presente estudio se desarrolló bajo un enfoque metodológico cualitativo de carácter descriptivo, configurándose como una propuesta de innovación pedagógica y diseño didáctico estructural, debido a la naturaleza del trabajo, no se recurrió a un diseño experimental con grupos de control ni a la recolección de datos estadísticos empíricos.

El procedimiento comenzó por establecer el soporte algebraico formal que rige la teoría de las transformaciones lineales, para ello se adoptó el enfoque analítico clásico de Grossman (2012),

utilizando los procedimientos estándar para el cálculo manuscrito del polinomio característico, determinantes y la posterior obtención exacta de los autovalores y autovectores correspondientes a un sistema bidimensional, una vez consolidada esta base teórica fundamental, la estrategia didáctica rompió con la pasividad del cálculo en papel al introducir una secuencia instructiva estructurada en tres momentos interdependientes combinando las potencialidades de los entornos digitales GeoGebra y MATLAB, orientadas a resolver la desconexión cognitiva en el aprendizaje del álgebra lineal.

2.1. MOMENTO 1: INTUICIÓN Y VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA EN $\mathbb{R}^2$ MEDIANTE GEOGEBRA

El primer momento de la estrategia se centró en la construcción de la intuición geométrica en el plano bidimensional, se diseñó un entorno dinámico interactivo en GeoGebra donde se definió una matriz de transformación lineal A de orden 2×2 , metodológicamente se dispuso un conjunto de vectores unitarios que conformaban una circunferencia unitaria en el espacio de partida mediante el uso de deslizadores dinámicos y herramientas de arrastre, se configuró el sistema para que realizara la transformación geométrica en tiempo real, proyectando el espacio de llegada.

La actividad guiada se estructuró para que el estudiante identificara visualmente la deformación del círculo en una elipse de tracción, observando cómo la mayoría de los vectores variaban simultáneamente en magnitud y dirección. El propósito metodológico fundamental de este momento fue guiar al estudiante al descubrimiento intuitivo de los autovectores, definidos operacionalmente como aquellas direcciones espaciales que permanecían invariantes (colineales) tras la transformación matricial, y cuyos factores de escala correspondían exactamente a los autovalores.

2.2. MOMENTO 2: CONEXIÓN ALGEBRAICA, NUMÉRICA Y ALGORITMO EN MATLAB

Una vez consolidada la representación visual, el segundo momento formalizó los hallazgos mediante el rigor algebraico y computacional en MATLAB, apuntando a romper el fenómeno de la "caja negra" informática. El procedimiento metodológico contempló la inserción de la misma matriz 2×2 empleada en el entorno bidimensional, a través de este entorno de programación, se estructuró una guía de laboratorio donde el estudiante contrastó analíticamente los resultados visuales de GeoGebra con las salidas numéricas del software científico.

Para evitar que el cálculo se redujera a la ejecución automática de comandos nativos de caja negra como $[V, D] = \text{eig}(A)$, la metodología incorporó la programación explícita de algoritmos iterativos basados en los fundamentos de aproximación numérica descritos por Suñagua (2016), específicamente, se diseñó la implementación del Método de las Potencias para la aproximación del autovalor dominante, este procedimiento permitió al estudiante asociar directamente los bucles de iteración numérica con la convergencia visual del vector hacia la dirección del eje principal de la elipse observada en el primer momento.

2.3. MOMENTO 3: EXTENSIÓN, ESCALABILIDAD Y ABSTRACCIÓN EN $\mathbb{R}^3$

El tercer momento metodológico se estructuró como un puente hacia la complejidad real de la ingeniería, caracterizada por sistemas multidimensionales donde la visualización geométrica directa se agota, se planteó la transición hacia un espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$) utilizando una matriz de transformación de 3×3 .

En esta etapa, el diseño instructivo delegó la carga operativa por completo a MATLAB para ejecutar transformaciones matriciales y factorizaciones avanzadas (tales como el algoritmo QR), el objetivo metodológico de este cierre fue demostrar al estudiante la escalabilidad de la abstracción lograda en las etapas previas, aunque visualizar un elipsoide de deformación en tres dimensiones y sus tres ejes de simetría (autovectores) es cognitivamente más complejo, la sólida base geométrica adquirida en el plano de $\mathbb{R}^2$ dotó de significado e interpretación ingenieril a los vectores y matrices de alta dimensión procesados por el computador.

2.4. IMPLEMENTACIÓN

Para operativizar el diseño y validar la secuencia didáctica, se seleccionó una matriz simétrica representativa definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Los resultados analíticos base establecidos para el control docente determinaron que el polinomio característico es: $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$, dando como resultados $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$, los autovectores (que configuran matriz de paso P) asociados a estos autovalores son:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

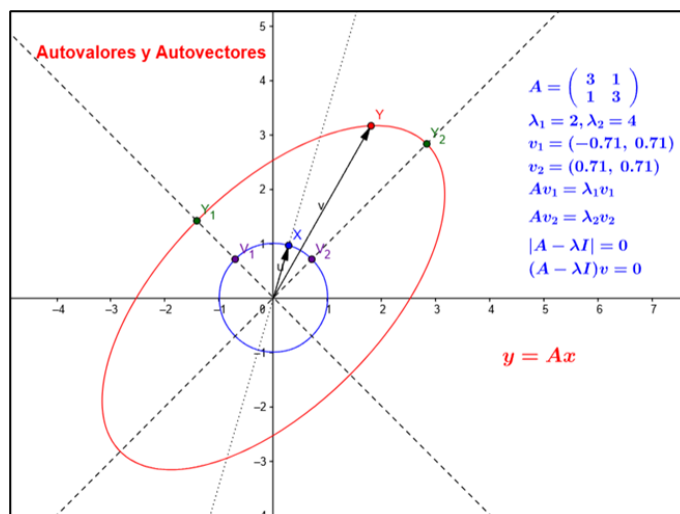
Aplicación del primer momento:

El entorno interactivo de GeoGebra arroja como resultado gráfico la transformación interactiva del plano, al ingresar un conjunto de vectores que delimitan una circunferencia unitaria descrita por $x^2 + y^2 = 1$, el software grafica dinámicamente la elipse transformada bajo la acción de la matriz A .

Al manipular el deslizador del vector unitario de prueba u , el estudiante observa objetivamente que, en la mayoría de las trayectorias, el vector transformado Au diverge de la dirección de u , el hallazgo visual clave ocurre cuando el usuario alinea a u exactamente en las direcciones de los ángulos correspondientes a las direcciones de los autovectores: $\theta_1 = 45^\circ$ y $\theta_2 = 135^\circ$, en estos puntos precisos, los vectores resultantes se superponen colinealmente con sus originales, multiplicando su longitud por factores exactos de 4 y 2, respectivamente. Este hecho visualiza la definición abstracta de la ecuación fundamental $Au = \lambda u$, transformándola en un fenómeno de simetría espacial observable.

Figura 1

Transformación geométrica de una circunferencia unitaria en elipse de tracción en $\mathbb{R}^2$



Fuente: Adaptado de Métodos Numéricos (código interactivo de GeoGebra), por P. Suñagua Salgado, 2016.

Aplicación del segundo momento:

El resultado en esta etapa consiste en la inserción del código fuente algorítmico provisto en una guía de laboratorio, evitando la opacidad de la "caja negra" informática, siguiendo los principios de aproximación numérica, se estructuró un script adaptado del Método de las Potencias para

aproximar el autovalor dominante ($\lambda_1 = 4$) de forma iterativa, el algoritmo estructurado se detalla en el fragmento de código adaptado.

Figura 2

Algoritmo estructurado en MATLAB para la aproximación iterativa del autovalor dominante mediante el Método de las Potencias

```
% Algoritmo de Aproximación del Autovalor Dominante
% Adaptado bajo los fundamentos numéricos de Suñagua (2016)
A = [3, 1; 1, 3];
x = [1; 0]; % Vector inicial de prueba
tol = 1e-5; % Tolerancia admisible
maxiter = 100; % Máximo de iteraciones
err = 1; k = 0; lam_viejo = 0;

while err > tol && k < maxiter
    y = A * x;
    [~, idx] = max(abs(y));
    lam = y(idx) / x(idx); % Estimación del autovalor
    x = y / norm(y, inf); % Normalización del vector
    err = abs(lam - lam_viejo);
    lam_viejo = lam;
    k = k + 1;
end
fprintf('Autovalor dominante aproximado: %.4f en %d iteraciones\n', lam, k);
```

Fuente: Adaptado de Métodos Numéricos, por P. Suñagua Salgado, 2016.

La ejecución de este código devuelve como resultado una convergencia rápida hacia el valor numérico de $\lambda = 4$ en menos de 15 iteraciones, esto le permite al estudiante ligar el proceso algorítmico de bucles con la tracción geométrica observada en GeoGebra, comprendiendo que el método computacional busca numéricamente el eje de máximo estiramiento de la elipse en el plano cartesiano.

Llegada al tercer momento, Escalabilidad y Abstracción en $\mathbb{R}^3$

Como cierre de la propuesta didáctica, los resultados se extienden al espacio tridimensional donde la intuición visual manual resulta insuficiente, para ello se diseñó la incorporación de una matriz 3×3 simétrica dentro de la guía de MATLAB:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En esta fase, la propuesta delega formalmente la carga computacional pesada a los comandos nativos de alto rendimiento de MATLAB, al ejecutar la instrucción $[V, D] = \text{eig}(A)$, el sistema devuelve las matrices completas de autovalores y autovectores en el espacio tridimensional, el resultado cognitivo esperado en esta etapa es la asimilación del estudiante de que, aunque no es posible manipular vectores en $\mathbb{R}^3$ con la misma facilidad interactiva que en GeoGebra, la interpretación de la salida de MATLAB ya no es un conjunto de números sin sentido; representan las direcciones espaciales ortogonales de un elipsoide de deformación tridimensional, rompiendo por completo la barrera netamente algebraica.

3. RESULTADOS

El resultado principal de esta innovación pedagógica es la estructura misma de la didáctica secuencial, diseñada para integrarse en las asignaturas de Álgebra Lineal de las carreras de Ingeniería, los hallazgos conceptuales e instrumentales que componen el diseño se detallan formalmente a continuación.

En primera instancia, se consolidó la articulación pedagógica entre los entornos digitales mediante una matriz de funciones complementarias, el propósito fue equilibrar la intuición visual inmediata con el rigor operativo, tal como se sintetiza en la Tabla 1.

Tabla 1
Matriz de complementariedad didáctica entre GeoGebra y MATLAB para la diagonalización

DIMENSIÓN PEDAGÓGICA	ENTORNO GEOGEBRA ($\mathbb{R}^2$)	ENTORNO MATLAB ($\mathbb{R}^3$)
Enfoque Cognitivo	Visualización geométrica intuitiva, descubrimiento dinamismo e interactivo.	Formalización analítica, rigor numérico, abstracción y escalabilidad.
Objeto Matemático de estudio	Deformación del espacio, elipse de tracción, colinealidad de vectores principales (autovectores).	Matrices de paso (modales P), formas diagonales (D), convergencia de algoritmos iterativos.
Rol del estudiante	Explorador manipulativo de variables mediante deslizadores gráficos.	Programador analítico, evaluador de aproximaciones operativas.
Rol del software	Eliminación del cálculo manual inicial, priorizando el fenómeno espacial.	Optimización del procesamiento, automatización algorítmica y entrega de resultados profesionales.

Fuente: Elaboración propia.

4. DISCUSIÓN

La transición desde un enfoque puramente algebraico – operativo hacia una metodología de enseñanza fundamentada en la simulación digital bidireccional demuestra ventajas cognitivas críticas en la formación de estudiantes de ingeniería, tradicionalmente, la enseñanza de la diagonalización de matrices satura al estudiante con la resolución abstracta de ecuaciones polinomiales y determinantes, reduciendo un concepto de alta relevancia física a un proceso algorítmico mecánico. Al contrastar esta realidad con el diseño didáctico propuesto, se evidencia que la introducción secuencial de GeoGebra y MATLAB actúa como un andamiaje cognitivo indispensable.

El uso inicial de GeoGebra en el plano $\mathbb{R}^2$ permite al estudiante interactuar directamente con la distorsión del espacio, transformando la definición abstracta de autovalores y autovectores en propiedades geométricas tangibles y observables, como la colinealidad y los factores de escala de una elipse de tracción, esta visualización previa es fundamental para mitigar el riesgo de la aplicación de la instrucción matemática desvinculada de su interpretación conceptual, muchas veces el estudiante convierte al software en una "caja negra" que entrega resultados aislados a ciegas. Al programar el Método de las Potencias en MATLAB posterior a la experiencia visual, el estudiante no ejecuta un comando automático; por el contrario, comprende que las iteraciones numéricas del bucle computacional rastrean el eje principal de simetría y deformación que ya observó dinámicamente en el entorno interactivo.

Finalmente, la escalabilidad hacia el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ en MATLAB consolida la capacidad de abstracción, aunque la visualización geométrica directa de elipsoides y vectores ortogonales se torna compleja en dimensiones superiores, la base intuitiva construida en el plano cartesiano dota de inmediato de significado ingenieril a las salidas matriciales del computador. Esta sinergia tecnológica no sustituye el rigor analítico, sino que optimiza el tiempo de aula, desplazando el esfuerzo de la tediosa aritmética manuscrita hacia el análisis crítico, la programación algorítmica y la interpretación de resultados aplicados a problemas reales de ingeniería.

5. CONCLUSIONES

- La integración secuencial de GeoGebra y MATLAB para la enseñanza de la diagonalización de matrices constituye una alternativa pedagógica viable y robusta frente al modelo de enseñanza abstracta y memorística tradicional en las carreras de ingeniería.

- El diseño didáctico estructurado en tres momentos demostró que es posible unificar la intuición geométrica interactiva con el rigor del cálculo numérico, permitiendo al estudiante comprender la transformación espacial antes de automatizar el algoritmo en el computador.
- La implementación del Método de las Potencias en MATLAB, respaldada por la experiencia visual en GeoGebra, desmitifica el uso del software científico, logrando romper de manera efectiva el fenómeno de la "caja negra" y promoviendo un aprendizaje verdaderamente significativo.
- Esta propuesta proporciona a la comunidad docente un modelo instruccional estructurado, reproducible y alineado con los estándares internacionales de la educación en ingeniería, fomentando de manera simultánea competencias analíticas, tecnológicas y algorítmicas en los futuros profesionales.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? ACM SIGSAM Bulletin, 24(1), 10–17.

https://www.researchgate.net/publication/234806607_Should_students_learn_integration_rules_SIGSAM_Bulletin_241_10-17

Candilejo Egea, J. M. (2026). Algoritmos para el análisis y aprendizaje automático en redes y grafos: Procesamiento de señales de grafo [Trabajo de fin de máster, Universidad de Sevilla]. <https://idus.us.es/server/api/core/bitstreams/d0e64562-849f-4e82-b103-bd5693e3fa88/content>

Grossman, S. I. (2012). Álgebra lineal (7.^a ed.). McGraw-Hill.

Suñagua Salgado, P. (2016). Métodos Numéricos. Universidad Mayor de San Andrés.

Velásquez, I., Sosa, M., & Zarco, R. (1977). La potencialidad cognitiva de los softwares educativos diseñados desde el enfoque de la usabilidad [Artículo de conferencia, Universidad Nacional de Santiago del Estero]. Repositorio Institucional SEDICI - UNLP. https://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/22533/Documento_completo.PDF?sequence=1&isAllowed=yv