

UNA FUNCIÓN DE CONSUMO ALTERNATIVA A LA KEYNESIANA Y SU EFECTO EN LA TRIBUTACIÓN

Rafael Torrez Valdivia ¹ Gabriela Villarroel Laime

1. Carrera de Derecho, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia
nobvak@gmail.com | ORCID: 0009-0003-9190-3677

RESUMEN

El presente trabajo examina críticamente las funciones de consumo clásica y keynesiana, poniendo de manifiesto las limitaciones teóricas derivadas del supuesto de constancia de la propensión marginal al consumo. Sobre esa base, desarrolla una función de consumo alternativa que incorpora una propensión marginal decreciente respecto al ingreso y un nivel de saturación del consumo, con el propósito de representar de manera más realista el comportamiento agregado de los consumidores. La investigación adopta un enfoque deductivo, sustentado en la formulación axiomática del modelo y en el empleo de herramientas elementales del cálculo diferencial, integral y del álgebra. A partir de los supuestos propuestos, se derivan las funciones de consumo, ahorro y elasticidad ingreso del consumo, así como su comportamiento bajo un régimen de tributación proporcional. Los resultados muestran que la propensión marginal al consumo disminuye progresivamente hasta anularse en el ingreso de saturación, mientras que la elasticidad ingreso del consumo deja de aproximarse asintóticamente a la unidad y converge a cero. Asimismo, el estudio de la elasticidad de la función propuesta permite inferir que la tributación sobre los ingresos de los consumidores debe ajustarse en proporción a la diferencia existente entre su nivel corriente de consumo y el consumo de saturación, criterio que proporciona un fundamento teórico para el diseño de una estructura impositiva más consistente con el comportamiento dinámico del consumo. Se concluye que la función propuesta supera varias de las restricciones analíticas del modelo keynesiano tradicional y constituye una alternativa teórica consistente para el estudio del consumo macroeconómico y de sus implicaciones en la política fiscal.

Palabras clave: Función de consumo; Consumo macroeconómico; Propensión marginal al consumo; Elasticidad ingreso del consumo, Política fiscal.

1. INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo es examinar las dos teorías más difundidas del consumo macroeconómico —la función clásica y la función keynesiana— para, posteriormente, justificar y desarrollar una función de consumo alternativa que permita representar de manera más realista uno de los fenómenos fundamentales de la economía: el consumo. Además, se discurre sobre los efectos de la tributación corrigiendo la Función Keynesiana de Consumo y también en la función alternativa desarrollada.

La innovación principal consiste en abandonar el supuesto de constancia de la propensión marginal al consumo. En el modelo propuesto, dicha propensión —que, conforme a la teoría keynesiana, es inferior a la propensión media al consumo— permanece positiva, pero disminuye progresivamente hasta anularse en el punto de saturación del consumo. Asimismo, se desarrolla el comportamiento de la elasticidad del consumo y se establecen los parámetros que permiten particularizar el esquema general propuesto.

El presente trabajo ha sido desarrollado por el Dr. Rafael Torrez Valdivia, docente titular de la asignatura de Macroeconomía en la Carrera de Ciencias Políticas y Gestión Pública de la Universidad Mayor de San Andrés y, anteriormente, docente durante más de ocho años de la asignatura de Inferencia Estadística y Muestreo en la Carrera de Economía. Con el propósito de facilitar su comprensión y publicación, el manuscrito ha sido revisado pedagógicamente por la licenciada Gabriela Villarroel Laime, que ha promovido que sean explícitas las formulaciones que permiten encontrar los parámetros de las funciones involucradas.

Apartando toda falsa modestia, el presente trabajo representa, hasta donde alcanza el conocimiento del autor, uno de los pocos modelos matemáticos de base axiomática completa —es decir, orientado a explicar un fenómeno general y no un caso particular— desarrollados en Bolivia.

En la exposición se emplean únicamente herramientas elementales del cálculo diferencial e integral que deberían encontrarse al alcance de todo bachiller y, con mayor razón, de quien aspire a ejercer la actividad científica. Tal precisión resulta pertinente en una época en la que la enseñanza de la matemática ha experimentado un notorio deterioro en Bolivia, particularmente desde la implementación de la Ley Avelino Siñani-Elizardo Pérez, cuyas consecuencias sobre la formación matemática constituyen, a juicio del autor, un motivo legítimo de preocupación.

2. MÉTODO

El método seguido en la investigación es el analítico-deductivo. Toma como base axiomática los supuestos sobre los cuales se construye la teoría keynesiana, con excepción de la constancia de la

propensión marginal al consumo. Esta modificación permite formular una función alternativa del consumo, cuya característica esencial es el decrecimiento de dicha propensión hasta alcanzar su nulidad. De esta propiedad se deduce el teorema según el cual la elasticidad ingreso del consumo constituye una función no monótona que crece en los niveles inferiores de ingreso, alcanza un máximo y posteriormente se hace cero. Por otra parte, considerando que el trabajo puede ser utilizado por estudiantes, se expone de manera explícita la determinación de los parámetros de las funciones clásica y keynesiana mediante el método de regresión lineal de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

3. RESULTADOS

3.1. FUNCIÓN¹ DE CONSUMO² MACROECONÓMICA

3.1.1 Definición General: Se define la función de consumo macroeconómica³, como la relación matemática que expresa el consumo de una sociedad, en un periodo⁴, en referencia a sus causas relevantes en el indicado lapso, en términos matemáticos:

$$C_t = f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}) + u$$

Enunciado matemático en el que C_t representa el consumo en un lapso de tiempo, x_{it} cada uno de los elementos del vector de causas y u , un factor de perturbación que congloba las causas menos importantes no consideradas de forma específica que además se espera que en la agregación de las funciones de consumo individuales sea cero, $E(u) = 0$, siendo su varianza constante.

La función elemental de consumo, es decir, aquella que expresa el consumo como consecuencia del nivel del ingreso —considerado de forma coincidente por todas las teorías económicas serias como su causa más importante—, es:⁵

$$C_t = g(y_t) + u$$

¹ En términos estrictos, una función es la operación que relaciona los elementos de dos conjuntos, el primero denominado dominio y el segundo recorrido, de forma tal que a todos y cada uno de los elementos del dominio corresponde únicamente uno en el recorrido.

² Se denomina consumo al "acto económico por el cual las familias, mediante la adquisición de bienes duraderos, no duraderos o servicios, satisfacen sus necesidades o su boato".

³ También denominada "Función de Consumo Agregada", porque resulta de la suma, a cada uno de los distintos niveles de ingreso, de las funciones de consumo individuales manifestadas por las familias en un determinado plazo.

⁴ Generalmente un año, de acuerdo al uso de los registros en las cuentas nacionales.

⁵ En general, una tesis es **Elemental** (y así se llama) cuando explica un efecto únicamente mediante una causa; por el contrario, una tesis que explica al menos uno de los efectos que contiene con más de una causa es una **Tesis No Elemental**.

Otros argumentos relevantes, no expresados en la ecuación anterior, son la tasa de interés y el nivel de riqueza que han acumulado los consumidores. El primero explica especialmente el consumo de los bienes duraderos adquiridos mediante crédito; y el segundo, denominado "Efecto Pigou", considera la significación de la acumulación de bienes duraderos (especialmente inmuebles y depósitos bancarios) en la decisión de consumo, así como el efecto de la variación de los precios en la riqueza del consumidor.

3.1.2 Forma Estructural de la Función de Consumo Macroeconómica Elemental: De acuerdo a las distintas teorías respecto al consumo se han expresado diferentes formas estructurales⁶, siendo históricamente las más relevantes la Función de Consumo Clásica y la Función de Consumo Keynesiana, en este capítulo⁷ se hace un estudio de ambas además de una digresión propuesta por el autor.

3.2 ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRADICIONALES Y SUS LIMITACIONES

FUNCIÓN DE CONSUMO CLÁSICA

La Función Clásica⁸ del consumo macroeconómico sostiene que: *"El nivel de consumo macroeconómico es proporcional al nivel de ingreso"*⁹, es decir:

$$C_t = ky_t$$

Forma matemática en la que " k " representa simultáneamente la Propensión Marginal a Consumir (CM) y el Nivel Medio de Consumo¹⁰ (o también denominado Consumo Medio, Cm), es decir, asume que ambos son iguales.

La demostración de la proposición enunciada en el anterior párrafo es sencilla:

- 1) Dada la función de consumo $C_t = ky_t$, su derivada o "Consumo Marginal", que expresa el incremento infinitesimal del consumo ocasionado por un incremento infinitesimal del ingreso, $\frac{dc}{dy}$ es igual a k .

⁶ Aquellas que se expresan mediante proposiciones contenidas en formulas lógicas o matemáticas.

⁷ Del texto guía de la materia de Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística Aplicada a la Ciencia Política proyectado por el Dr. Torrez.

⁸ Que debiera tener por nombre más adecuado: "Pre keynesiana".

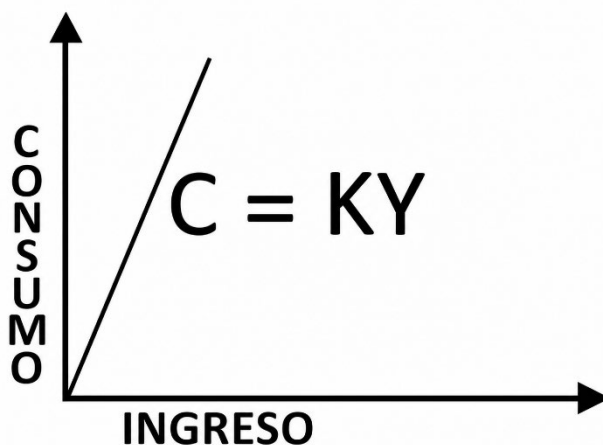
⁹ Esta premisa es fundamental en la comprensión de la automaticidad del equilibrio macroeconómico, sostenido por los economistas clásicos, plasmada en la famosa "Ley de J.B. Say" que se expresa en el apotegma económico **de que toda oferta crea su demanda.**

¹⁰ El cociente entre el nivel de consumo y el nivel de ingreso.

- 2) Verificándose que el "Consumo Medio", $\frac{c}{y}$, es también igual a k . Lo que demuestra en la Función Clásica de consumo la igualdad entre el Consumo Marginal y el Consumo Medio.

De acuerdo a su ámbito de definición la función de consumo clásica se representa en el primer cuadrante del plano cartesiano mediante una recta que parte del origen y cuya pendiente es menor a uno, aunque superior 0,5¹¹ (es decir se encuentra por encima de la bisectriz del indicado cuadrante):

Gráfico 1
Representación gráfica de la función de consumo clásica



Fuente: Elaboración propia.

3.2.1 Elasticidad del Consumo Bajo la interpretación Clásica: Definida la elasticidad del consumo respecto al ingreso ("Elasticidad Ingreso del Consumo") como los cambios relativos de aquel respecto a los cambios relativos de este, la función de elasticidad referida tiene la siguiente expresión:

$$e_y = \frac{\frac{dc}{c}}{\frac{dy}{y}} = \frac{dc}{dy} \cdot \frac{y}{c} = k \cdot \frac{y}{ky} = 1$$

Esto significa que, a cualquier nivel de ingreso, un incremento relativo (porcentual) del ingreso de cualquier proporción ocasionará un incremento relativo (porcentual) del consumo de la misma

¹¹ En el entendido que para cualquier nivel de ingreso el consumo es mayor que el ahorro.

proporción, sea cual sea la propensión marginal al consumo, k ; por lo que se denomina también "Función de Consumo Macroeconómica de Elasticidad Unitaria".

3.2.2 Función de Ahorro Clásica: Pudiendo asignarse el ingreso únicamente al consumo o al ahorro, la función de ahorro clásica presenta la siguiente expresión:

$$s = y - c = y - ky = (1 - k)y$$

En la que $(1 - k)$ representa la Propensión Marginal al Ahorro y también el Ahorro Medio, bajo la interpretación clásica de la función de consumo.

3.2.3 Proporción Ahorro Consumo: Bajo la interpretación clásica, la proporción ahorro consumo, χ , que representa por cada unidad de ingreso destinada al consumo cuántas unidades se destinan al ahorro, se construye como consecuencia de la siguiente relación matemática:

$$\chi = \frac{S}{C} = \frac{(1 - k)y}{ky} = \frac{1 - k}{k}$$

La cual tiene consistencia en la teoría tradicional en el intervalo $[0,1[$ ¹², lo que implica asumir que el consumo, para cualquier nivel de ingreso, es mayor que el ahorro¹³. En realidad, existen dos clases de consumidores: aquellos cuyo ahorro es menor que su nivel de consumo (que son abrumadoramente la mayoría) y aquellos de niveles de ingresos altos cuyos ahorros son mayores que su gasto de consumo. Se hace evidente que, al ser una constante, no depende del nivel de ingreso.

3.2.4 Imposición Proporcional bajo la concepción clásica: Dado un sistema impositivo que impone una tributación proporcional al ingreso, es decir, que grava al ingreso un determinado porcentaje, sea cual sea su nivel:

$$t = t'y$$

Ecuación en la que t' (una constante) representa la Propensión Marginal Impositiva (Alícuota General de Imposición) y también la Presión Tributaria (Nivel Promedio de Tributación); siendo t el nivel general de impuestos. El Ingreso Disponible (yd), que representa la causa inmediata del consumo atendiendo los presupuestos teóricos de la Concepción Clásica, estará dado por:

$$yd = y - t = y - t'y = (1 - t')y$$

¹² En notación matemática, el corchete invertido señala un intervalo semiabierto donde el límite superior no está incluido (equivalente a la notación $[0,1)$). Esto formaliza la premisa teórica de que el ahorro puede acercarse al nivel de consumo, pero nunca igualarlo ni superarlo.

¹³ Como ya se lo ha hecho explícito.

Consiguientemente, las funciones de consumo y de ahorro estarán dadas por las expresiones:

$$c = k(1 - t')y$$

$$s = (1 - k)(1 - t')y$$

Siguiendo esta función, está claro que no existe un motivo de exención tributaria, debiendo cobrarse tributos a cualquier nivel de ingreso¹⁴.

3.2.3 Estimación Econométrica

Determinación Mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios de la Propensión Marginal de Consumo

Clásica: Mediante el método econométrico básico de Mínimos Cuadrados Ordinarios, dado un conjunto de observaciones pareadas del ingreso y del consumo, obtenidas en distintos tiempos, que aparecen reflejadas en la Tabla N°1:

Tabla 2
CONSUMO – INGRESO

CONSUMO EN EL PERÍODO T	INGRESO EN EL PERÍODO T
C_1	Y_1
C_2	Y_2
...	...
C_n	Y_n

Fuente: Elaboración propia.

Se puede estimar de forma sencilla el único parámetro, $\hat{k}$, de la Función de Consumo Clásica, llegándose al siguiente resultado:

$$\hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i C_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

Si los datos fueran del ingreso disponible, bajo un régimen impositivo proporcional cuya tasa marginal impositiva es t' , el valor de $\hat{k}$ se estima colocando en la sumatoria los valores correspondientes al ingreso disponible en cada uno de los períodos considerados, como se detalla en la Tabla N° 2:

¹⁴ En todo el dominio positivo del ingreso, existe la posibilidad de ahorrar.

Tabla 2
CONSUMO – INGRESO DISPONIBLE

CONSUMO EN EL PERÍODO T	INGRESO DISPONIBLE EN EL PERÍODO T
C_1	$Y_1 - t'Y_1$
C_2	$Y_2 - t'Y_2$
...	...
C_n	$Y_n - t'Y_n$

Fuente: Elaboración propia.

3.2.4 Observaciones Críticas a la Función Clásica: La función de consumo clásica asume que, en la situación en la que el ingreso es nulo, el consumo también lo es; y que en todo el rango del ingreso el Consumo Medio es igual al Consumo Marginal. Estas características aparentemente realistas no describen adecuadamente lo que acontece en la realidad. En virtud de que, en el primer caso, cuando el ingreso es cero, subsiste la adquisición de bienes mediante la liquidación que hacen los consumidores de su riqueza acumulada; y en el segundo caso, respecto a la igualdad del Consumo Medio y el Consumo Marginal, la evidencia empírica indica de forma abrumadora que el Consumo Marginal es, en la generalidad de los casos, inferior al Consumo Medio, lo que es equivalente a que la elasticidad ingreso del consumo es decreciente.

3.3 FUNCIÓN DE CONSUMO KEYNESIANA Y SUS OBSERVACIONES

FUNCIÓN DE CONSUMO KEYNESIANA¹⁵

La función de consumo keynesiana enuncia que: "El consumo de bienes y servicios macroeconómico es igual a la adición del 'Consumo Autónomo', simbolizado por c_0 (constante y que no depende del nivel de ingreso), con el 'Consumo Inducido', representado por $c'y$ (que es proporcional al nivel de ingreso, denominándose a c' Propensión Marginal al Consumo)", siendo en consecuencia la fórmula matemática que lo representa:

$$c = c_0 + c'y$$

Que teóricamente es consistente cuando c_0 es positivo y c' se encuentra en el rango $[0,1]$.

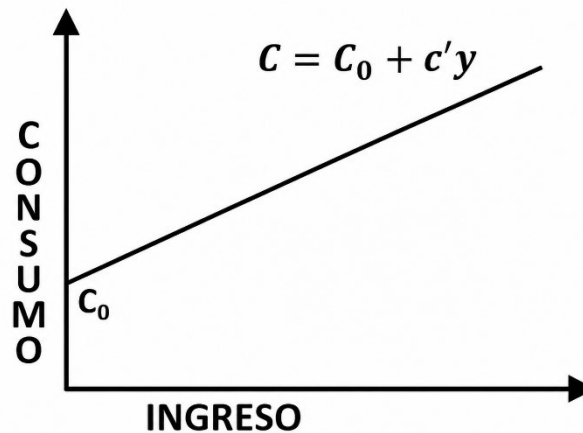
En la Función de consumo Keynesiana la Propensión Marginal al Consumo (CM) es menor que el Consumo Medio (Cm) en el valor del cociente $\frac{c_0}{y}$, como se demuestra en la siguiente ecuación:

¹⁵ Generada a partir de la crisis capitalista de los años 30, a consecuencia de que, en el flujo circular de la economía, no se produjo un equilibrio entre la oferta de bienes y servicios y su demanda.

$$CM = \frac{dc}{dy} = c' < \frac{c_0 + c'y}{y} = \frac{c_0}{y} + \frac{c'y}{y} = \frac{c_0}{y} + c' = Cm$$

Se representa por una recta cuya intersección con el eje de las ordenadas representa el Consumo Autónomo (c_0), mientras que su pendiente representa la Propensión Marginal al Consumo (c').

Gráfico 2
representación de la función de consumo keynesiana



Fuente: Elaboración propia.

3.3.1 Elasticidad del Consumo Bajo la Interpretación Keynesiana: La elasticidad ingreso del consumo bajo la interpretación keynesiana tiene la siguiente expresión:

$$e_k = \frac{dc}{dy} \cdot \frac{y}{c} = c' \cdot \frac{y}{c_0 + c'y} = \frac{c'y}{c_0 + c'y}$$

Lo cual, como está demostrado por el anterior desarrollo matemático, es menor a la unidad. En atención a los presupuestos teóricos de la función de consumo keynesiana, esto implica que un aumento porcentual (sea cual sea) del nivel de ingreso ocasionará un aumento porcentual de menor proporción en el nivel de consumo.

3.3.2 Evolución de la Elasticidad Ingreso del Consumo en el Modelo Keynesiano: La elasticidad ingreso del consumo cambia de acuerdo a la evolución del ingreso de la siguiente manera:

$$\frac{de_k}{dy} = \frac{c'(c_0 + c'y) - c'(c'y)}{(c_0 + c'y)^2} = \frac{c'c_0}{(c_0 + c'y)^2}$$

Resultado que hace patente su decrecimiento (disminución) respecto a la elevación del nivel de ingreso.

El límite del cambio de la elasticidad ingreso del consumo es:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{c'c_0}{(c_0 + c'y)^2} = 0$$

Lo cual se interpreta como que, a niveles altos de ingreso, el incremento porcentual del consumo será nulo.

3.3.3 Función de Ahorro Keynesiana: La función de ahorro keynesiana está definida mediante la siguiente expresión:

$$s = -c_0 + (1 - c')y = s_0 + s'y$$

En la que el Consumo Autónomo (c_0) es el inverso aditivo del Ahorro Autónomo (s_0), y la Propensión Marginal al Ahorro es uno menos la Propensión Marginal al Consumo ($1 - c'$).

Se aprecia fácilmente que el nivel de ingreso mínimo para sostener el consumo sin disminución de la riqueza es:

$$y = \frac{-s_0}{1 - c'} = \frac{c_0}{1 - c'}$$

3.3.4 Proporción Ahorro Consumo Keynesiana: Las unidades de ahorro (fracción propia de unidad) destinadas al ahorro, por cada unidad que se destina al consumo, son obtenidas en aplicación de la siguiente expresión:

$$\chi = \frac{S}{C} = \frac{s_0 + s'y}{c_0 + c'y} = \frac{-c_0 + (1 - c')y}{c_0 + c'y}$$

3.3.5 Evolución de la Proporción de Ahorro Consumo Keynesiana: A medida que aumenta el nivel de ingreso, la proporción de Ahorro Consumo cambia de la siguiente forma:

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{d \left[\frac{-c_0 + (1 - c')y}{c_0 + c'y} \right]}{dy} = \frac{(1 - c')(c_0 + c'y) - c'[-c_0 + (1 - c')y]}{(c_0 + c'y)^2}$$

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{c_0}{(c_0 + c'y)^2} > 0$$

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} = \frac{-2c_0c'}{(c_0 + c'y)^3}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-c_0 + (1 - c')y}{c_0 + c'y} = \frac{1 - c'}{c'} = \frac{s'}{c'}$$

El límite, que es la ratio entre la Propensión Marginal al Ahorro y la Propensión Marginal al Consumo, representa la máxima proporción respecto al consumo que puede alcanzar el ahorro bajo los presupuestos keynesianos.

3.3.6 Imposición Proporcional Bajo los Presupuestos Keynesianos: Si se imponen tributos proporcionales al ingreso, es decir, este disminuye en $t'y$, donde t' es la tasa marginal impositiva y $(y - t'y)$ representa el Ingreso Disponible, la Función de Consumo Keynesiana se transforma en:

$$c = c_0 + c'(y - t'y) = c_0 + c'(1 - t')y$$

Consiguientemente, la Función de Ahorro Keynesiana es:

$$s = -c_0 + (1 - c')(1 - t')y = s_0 + s'(1 - t')y$$

3.3.7 Efecto de la Imposición Proporcional: Es una medida de la afectación que tienen los impuestos en el consumidor, representada por la ratio entre la diferencia del consumo sin imposición (consumo libre) y el consumo con imposición, sobre el nivel de consumo libre:

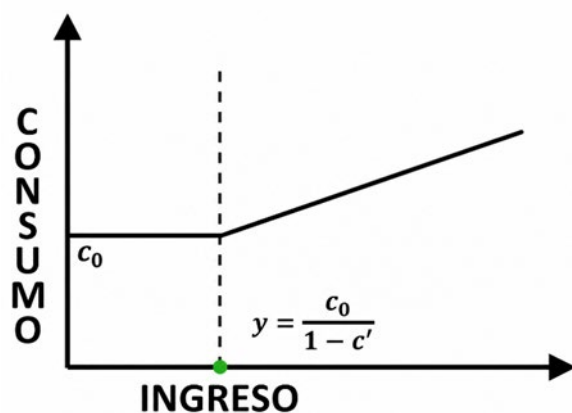
$$\Omega = \frac{[c_0 + c'y] - [c_0 + c'(1 - t')y]}{c_0 + c'y} = \frac{c't'y}{c_0 + c'y}$$

3.3.8 Nivel Mínimo de Imposición: En consideración a la premisa de que la imposición proporcional comienza a partir de que el nivel de ingreso es suficiente para subvenir el consumo sin que el individuo desahorre (presente un nivel de ahorro negativo) —aspecto esperado de la política fiscal de un Estado y consecuente con la función redistributiva de los impuestos¹⁶, Que se representa con el siguiente gráfico:

¹⁶ Una de las dos funciones más importantes de la política fiscal, la otra es la función recaudatoria. Se recauda para el sostenimiento de las magistraturas públicas y la provisión de otros servicios públicos, que benefician especialmente a las personas con menores ingresos.

Gráfico 3

Corrección de la función de consumo keynesiana



Fuente: Elaboración propia.

La Función de consumo keynesiana con rango corregido¹⁷ se transforma en:

$$c = \begin{cases} c_0 & \text{si } y < \frac{c_0}{1 - c'} \\ c_0 + c'(1 - t')y & \text{si } y \geq \frac{c_0}{1 - c'} \end{cases}$$

3.4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

3.4.1 Determinación Mediante Mínimos Cuadrados de los Parámetros de la Función de Consumo

Keynesiana: Dado un conjunto de observaciones pareadas del ingreso y del consumo, además de conocida la tasa marginal impositiva (t'), se tiene la siguiente tabla:

Tabla 1

Estructura de variables para la estimación de parámetros mediante Mínimos Cuadrados

CONSUMO	INGRESO DISPONIBLE
c_1	$y_1 - t'y_1$
c_2	$y_2 - t'y_2$
...	...
c_n	$y_n - t'y_n$

Fuente: Elaboración propia.

¹⁷ Digresión del autor.

Se pueden encontrar los parámetros c_0 y c' que definen la Función de Consumo Keynesiana aplicando el método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios.

En este caso, el Consumo Autónomo se define por:

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^n c_i \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i c_i}{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2}$$

En tanto, la Propensión Marginal al Consumo es:

$$c' = \frac{n \sum_{i=1}^n c_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n c_i}{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2}$$

3.5. OBSERVACIONES A LA FUNCIÓN DE CONSUMO KEYNESIANA

Si bien la Función de Consumo Keynesiana representa una notoria mejora respecto a la función de consumo clásica —especialmente si se tiene en cuenta su corrección para ingresos que implican la incapacidad de ahorro—, se pueden observar en esta proposición teórica los siguientes aspectos (sin que nos apartemos de la elementalidad causal enunciada anteriormente):

- La Propensión Marginal al Consumo permanece constante a medida que crece el nivel de ingreso, cuando es de esperar que disminuya cuando los individuos se vuelven más ricos.
- El límite de la razón Ahorro-Consumo es determinado por el cociente resultante de dividir la Propensión Marginal al Ahorro entre la Propensión Marginal al Consumo. Esta limitación no se aplica en situaciones en las que el ingreso crece raudamente y los consumidores no pueden reaccionar de forma inmediata, utilizando, en consecuencia, una mayor proporción de su ingreso al ahorro que la prevista por el indicado cociente. El supuesto de racionalidad del comportamiento de los consumidores implica que no realizarán compras impulsivas notoriamente significativas.
- La máxima elasticidad ingreso del consumo es igual a uno a niveles muy elevados de ingreso, cuando es de esperar que por efecto de la saturación¹⁸ disminuya ostensiblemente.

La función de consumo que salva estas observaciones, propuesta por el autor, es descrita en el siguiente acápite.

¹⁸ Las personas a un elevado nivel de ingreso han satisfecho sus expectativas de consumo.

3.6. FUNCIÓN DE CONSUMO KEYNESIANA CORREGIDA

Usando instrumentos algebraicos básicos, se puede hacer más consistente la Función de Consumo Keynesiana bajo los siguientes supuestos:

1. Que, de forma idéntica a la Función de Consumo Keynesiana corriente, existe un nivel de consumo independiente del nivel de ingreso: el Consumo Autónomo (c_0).
2. Que la Propensión Marginal al Consumo es linealmente decreciente, es decir, está sujeta a la siguiente relación matemática:

$$\frac{dc}{dy} = c'' - \alpha y$$

Expresión en la que c'' es el *Componente Originario*¹⁹ de la Propensión Marginal al Consumo, en tanto que $-\alpha y$ es el Componente Inducido por el Ingreso de la Propensión Marginal al Consumo (el componente sensible de forma opuesta al crecimiento del ingreso), y el parámetro α es la Tasa de Variación de la Propensión Marginal al Consumo motivada por el cambio del ingreso.

3. Que la función de consumo es una función monótona creciente, desde el punto en el que cesa el desahorro, hasta el punto de saturación.
4. Que existe un nivel de consumo de saturación a partir de un nivel de ingreso suficientemente elevado, en el cual se nulifica la Propensión Marginal al Consumo. No se consume más, en tanto que se ha satisfecho en toda su posibilidad el consumo.

A partir de las correcciones de la Función de Consumo Keynesiana que se han sostenido, y en consideración al presupuesto del segundo inciso, resulta:

$$c = \int (c'' - \alpha y) dy = c''y - \frac{\alpha}{2}y^2 + k_0$$

En la que k_0 representa una constante de integración que, por el enunciado del primer inciso, permite convertir la función de consumo en:

$$c = c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y\right)y$$

Forma en la que está claro que debe interpretarse c_0 como el Consumo Autónomo y c'' como la máxima Propensión Marginal al Consumo, que ocurre coetáneamente a la positividad del ingreso. Sin embargo, esta expresión, por el protocolo contenido en el inciso 3.4.1), únicamente tiene

¹⁹ Nombre preferible al denominativo de "Propensión Marginal al Consumo Autónoma".

validez en el rango de ingreso $\left[0, \frac{c''}{\alpha}\right]$, cuyo mayorante indica el nivel de ingreso para el cual el consumo deja de crecer, en consecuencia, de que, para este nivel, la Propensión Marginal al Consumo se ha nulificado:

$$\frac{dc}{dy} = c'' - \alpha y = 0 \Rightarrow y = \frac{c''}{\alpha}$$

Por lo que el nivel máximo del consumo, el Consumo de Saturación (C_s), es:

$$C_s = c_0 + \left[c'' - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{c''}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{c''}{\alpha} \right) = c_0 + \frac{c''^2}{2\alpha}$$

Consecuentemente, la Función de Consumo Z tiene la siguiente expresión:

$$c = \begin{cases} c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2} y \right) y & \text{si } y \leq \frac{c''}{\alpha} \\ c_0 + \frac{c''^2}{2\alpha} & \text{si } y > \frac{c''}{\alpha} \end{cases}$$

3.7. DEDUCCIÓN MATEMÁTICA Y CONSISTENCIA

3.7.1 Discusión de los rangos de consistencia teórica de sus parámetros:

- a. El Consumo Autónomo es:

$$c_0 > 0$$

debido a que es de esperar que la necesidad de sobrevivir, mediante el requerimiento de medios de subsistencia esenciales, compela a los individuos a consumir aun cuando no dispongan de rentas, salarios o beneficios; ya sea liquidando su patrimonio acumulado en el pasado, recurriendo a la caridad pública o de sus allegados, e incluso a actos de apropiación del patrimonio ajeno.

- b. La Propensión Marginal al Consumo Originaria (no dependiente del ingreso) es:

$$0 < c'' < 1$$

consecuentemente a la proposición que hace la teoría keynesiana ordinaria, la cual interpreta que los incrementos del ingreso, sea cual sea su nivel, se fraccionarán en consumo o en ahorro.

- c. La Propensión Marginal al Consumo (PMC) está en el rango:

$$0 < \frac{dc}{dy} < 1$$

Este supuesto significa la disminución del consumo marginal a medida que aumenta el nivel de ingreso, que la indicada propensión marginal no puede convertirse en negativa, y que su límite máximo es la Propensión Marginal al Consumo Originaria, que coincide con el nivel mínimo de ingreso (la positividad del nivel de ingreso).

Ergo, en referencia al supuesto enunciado en el inciso 3.6):

$$0 < (c'' - \alpha y) < c''$$

Restando a todos los miembros de la desigualdad el parámetro c'' , se convierte en:

$$-c'' < -\alpha y < 0$$

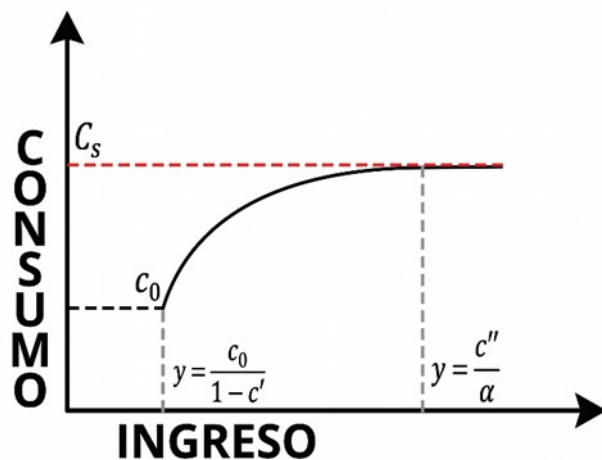
Expresión que, multiplicada por (-1) e invirtiendo los signos de desigualdad, indica que la Variación de la Propensión Marginal al Consumo se encuentra en el rango:

$$0 < \alpha y < c''$$

Expresión en la que α es un número positivo comprendido en el intervalo $[0, c'']$.

Gráfico 4

Representación gráfica de la función de consumo alternativa



Fuente: Elaboración propia.

3.7.2 Elasticidad Ingreso del Consumo en la Función de Consumo Alternativa ("A"): Se pergeña, siguiendo la definición general de la elasticidad, en la siguiente expresión:

$$e_A = \frac{dc}{dy} \frac{y}{c} = \begin{cases} \frac{(c'' - \alpha y)y}{c_0 + (c'' - \frac{\alpha}{2}y)y} & \text{si } y < \frac{c''}{\alpha} \\ 0 & \text{si } y \geq \frac{c''}{\alpha} \end{cases}$$

3.7.3 Evolución de la Elasticidad Ingreso del Consumo en la Función de Consumo Alternativa: En su tramo relevante, es decir, cuando el nivel de ingreso es menor a c''/α , la nombrada elasticidad evoluciona como lo indica la siguiente expresión:

$$\frac{de_A}{dy} = \frac{[c'' - 2\alpha y] \left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right] - [c'' - \alpha y][(c'' - \alpha y)y]}{\left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2}$$

$$\frac{de_A}{dy} = \frac{c_0 c'' - \frac{\alpha c''}{2} y^2 - 2\alpha c_0 y}{\left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2} = -\frac{\alpha c'' y^2 + 4\alpha c_0 y - 2c_0 c''}{2 \left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2}$$

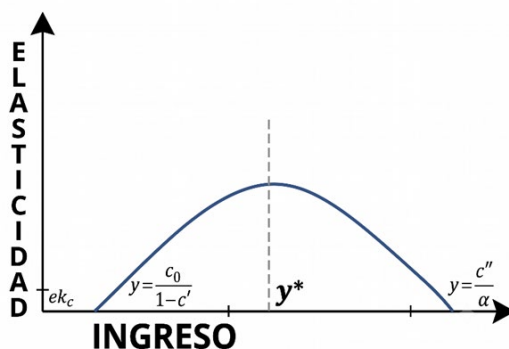
Que alcanza su mayor nivel (en valor absoluto) cuando se nulifica el numerador de la expresión anotada que la representa, en el nivel de ingreso crítico (y^*):

$$y^* = \frac{-4\alpha c_0 + \sqrt{16\alpha^2 c_0^2 + 8\alpha c''^2 c_0}}{2\alpha c''}$$

Es decir, en primera instancia, a medida que aumenta el nivel de ingreso, se consume relativamente más a una tasa decreciente; luego, la relación de incrementos porcentuales es constante, para decrecer a una tasa progresiva hasta hacerse nula en el nivel de ingreso de saturación, que en el gráfico representa el punto de intersección de la curva con el eje de las abscisas.

Gráfico 4

Evolución de la ELASTICIDAD - INGRESO del consumo en el modelo alternativo



Fuente: Elaboración propia.

3.7.4 Función de Ahorro Alternativa: Al ser el ahorro la diferencia entre el ingreso y el consumo, la función de ahorro inherente será:

$$S = \begin{cases} y - \left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2} y \right) y \right] = -c_0 + \left(1 - c'' + \frac{\alpha}{2} y \right) y & \text{si } y \leq \frac{c''}{\alpha} \\ y - c_0 + \frac{c''^2}{\alpha} \left[1 - \frac{1}{2\alpha} \right] & \text{si } y > \frac{c''}{\alpha} \end{cases}$$

Es decir, que a partir del nivel de ingreso que determina la saturación del consumo, todos los incrementos ulteriores del ingreso se destinarán al ahorro.

El punto de positividad del ahorro está dado por:

$$S = 0 = -c_0 + \left(1 - c'' + \frac{\alpha}{2} y \right) y$$

$$y = \frac{(c'' - 1) + \sqrt{(1 - c'')^2 + 4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) c_0}}{\alpha}$$

Una única solución, en virtud de que otra, es inconsistente con los presupuestos teóricos de los parámetros el tomar en cuenta el signo negativo de la raíz cuadrada del discriminante.

3.7.5 Proporción de Ahorro Consumo en la Función Alternativa: La Proporción de Ahorro-Consumo en la función referida se plasma en la siguiente expresión:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \frac{c_0}{1-c''} \\ \frac{-c_0 + \left(1 - c'' + \frac{\alpha}{2}y\right)y}{c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y\right)y} & \text{si } \frac{c_0}{1-c''} < y \leq \frac{c''}{\alpha} \\ \frac{y - c_0 - \frac{c''^2}{2\alpha}}{c_0 + \frac{c''^2}{2\alpha}} & \text{si } y > \frac{c''}{\alpha} \end{cases}$$

3.8. ANÁLISIS DE TRIBUTACIÓN Y EFECTO IMPOSITIVO

3.8.1 Evolución de la Proporción de Ahorro Consumo Alternativa: La proporción nombrada evoluciona bajo la expresión que sigue:

$$\frac{d\chi_A}{dy} = \frac{[\alpha y - c''] \left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right] - [c'' - \alpha y] \left[-c_0 + \left(1 - c'' + \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]}{\left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2}$$

Simplificando:

$$\frac{d\chi_A}{dy} = \frac{\alpha y^2 - c''y}{\left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2} = \frac{-(c'' - \alpha y)y}{\left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2}$$

Alcanza un mínimo, evidentemente, en el nivel de ingreso que convierte la primera derivada de su numerador en nula:

$$0 = \frac{d(-(c'' - \alpha y)y)}{dy} \Rightarrow y = \frac{c''}{2\alpha}$$

A partir de ese punto sube, hasta que en el nivel de ingreso de saturación se hace positiva; e, indefinidamente, la proporción Ahorro-Consumo tiende asintóticamente a uno, como lo refleja su evolución dependiente del nivel de ingreso.

$$\frac{d\chi_A}{dy} = \begin{cases} \frac{-PMC \cdot y}{\left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right]^2} & \text{si } y \leq \frac{c''}{\alpha} \\ \frac{1}{c_0 + \frac{c''^2}{\alpha} \left[1 - \frac{1}{2\alpha} \right]} & \text{si } y > \frac{c''}{\alpha} \end{cases}$$

Que evidentemente es constante a partir del nivel de ingreso de saturación; lo que quiere decir que a partir de ese punto la proporción crece de forma lineal.

3.8.2 Imposición Proporcional Bajo los Presupuestos Alternativos: Definida una estructura tributaria que imponga impuestos proporcionales al ingreso, en la que las recaudaciones sean $T = t'y$, la Función de Consumo Keynesiana Corregida, en su primer tramo —que corresponde a la situación en la cual el ingreso tiene una influencia no nula en el consumo—, se torna en:

$$c_c = c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}(y - t'y) \right) (y - t'y)$$

$$c_c = c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}(1 - t')y \right) (1 - t')y$$

Ecuación que nos insta a enunciar que el Consumo de Saturación, que implica²⁰:

$$\frac{dc_c}{dy} = 0 = (1 - t')(c'' - \alpha(1 - t')y)$$

Se da al nivel de ingreso $y = \frac{c''}{\alpha(1 - t')}$, a partir del cual (segundo tramo) el consumo se transforma en:

$$c_c = c_0 + \frac{c''^2}{2\alpha}$$

El mismo nivel encontrado para la situación en la que no se impone el pago de tributos; en consecuencia, el efecto impositivo es relevante en niveles de ingreso inferiores al Nivel de Ingreso de Saturación, y se señala en la diferencia:

$$c - c_c = \left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}y \right) y \right] - \left[c_0 + \left(c'' - \frac{\alpha}{2}(y - t'y) \right) (y - t'y) \right]$$

$$c - c_c = c''t'y - \frac{\alpha}{2}[2t' - t'^2]y^2$$

Cuya positividad se hace evidente al factorizar $t'y$:

$$c - c_c = t'y \left[c'' - \frac{\alpha}{2}[2 - t']y \right]$$

Y reescribiendo los términos del corchete:

²⁰ Condición necesaria de un Máximo Relativo.

$$c - c_c = t'y \left[c'' - \alpha y + \frac{\alpha}{2} t'y \right] = t'y \left[PMC + \frac{\alpha}{2} yt' \right]$$

Por otra parte, la diferencia máxima se encuentra derivando su expresión e igualándola a cero:

$$\frac{d(c - c_c)}{dy} = c''t' - \alpha(2t' - t'^2)y = 0 \Rightarrow y = \frac{c''}{\alpha(2 - t')}$$

Que de forma nítida es inferior al nivel de ingreso que implica la saturación del consumo:

$$y = \frac{c''}{\alpha(1 - t')}$$

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La Función de Consumo Macroeconómica alternativa a la Keynesiana ha sido lograda sin mucha parafernalia matemática, mediante sencillas digresiones a la Función de Consumo Keynesiana tradicional. A partir de este desarrollo, se establecen las siguientes conclusiones fundamentales:

- I. **Sobre el Comportamiento Realista del Consumidor:** Se demuestra que la Propensión Marginal al Consumo no es únicamente constante y menor al consumo medio para todos los niveles de ingreso. Por el contrario, esta disminuye paulatinamente hasta hacerse nula al alcanzar un alto nivel económico, definido como Ingreso de Saturación.
- II. **Sobre la Evolución de la Elasticidad Ingreso:** Durante el primer tramo de ingresos, la reacción relativa del consumo es positiva y creciente (regresivamente). Tras cruzar un umbral crítico, se vuelve decreciente hasta anularse por completo en el nivel de saturación. En esta etapa, el incentivo para consumir desaparece, puesto que el individuo ya ha satisfecho a corto plazo las expectativas de bienestar planificadas para ese periodo.
- III. **Sobre la Política Tributaria (Inferencia Práctica):** Aunque no fue el propósito central del trabajo, se deduce de manera contraintuitiva que un sistema tributario justo debería aplicar alícuotas *inversamente proporcionales* a la diferencia entre el ingreso corriente del consumidor y el Ingreso de Saturación²¹. Es decir, a medida que esa brecha se reduce, la carga tributaria debe subir; aplicando la alícuota máxima (y persistente) a aquellos ingresos que alcancen o superen el punto donde el consumo se satura.

²¹ Determinando obviamente mediante una media para cada país.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, R. G. D. (1964). *Análisis matemático para economistas* (6ta ed.). Aguilar, S.A. de Ediciones.

Allen, R. G. D. (1967). *Economía matemática* (2da ed.). Aguilar, S.A. de Ediciones.

Benavie, A. (s.f.). *Técnicas matemáticas del análisis económico*. Editorial Prentice/Hall Internacional.

Branson, W. H. (s.f.). *Teoría y política macroeconómica*. Fondo de Cultura Económica.

Caballero Fernández, R. E., González Pareja, A. C., & Triguero Ruiz, F. A. (1992). *Métodos matemáticos para la economía*. McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.

Chiang, A. C. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática* (3ra ed.). Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V.

Gordon, R. J. (1996). *Macroeconomía* (6ta ed. en inglés, 1ra ed. en español). Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. (CECSA).

Hansen, A. H. (1950). *Guía de Keynes*. Fondo de Cultura Económica.

Intriligator, M. D. (s.f.). *Optimización matemática y teoría económica*. Editorial Prentice/Hall Internacional.

Piatier, A., Cahuzac, P., & Chambadal, L. (s.f.). *Economía y matemáticas: Elementos y ejercicios* (Tomo I). Ediciones Ariel.

Smith, W. L. (1979). *Macroeconomía* (2da reimpresión). Amorrortu editores S.A.